

Innehåll:

- Repetition av egenvärden och egenvektorer
- Diagonalisering
- Symmetriska matrisen

1. Egenvärden - en kort repetition

Följande känner vi igen från tidigare. Låt A vara $n \times n$ -matris och låt $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.

- En vektor $\vec{v} \neq 0$ i \mathbb{R}^n kallas för en egenvektor till A med egenvärde λ om $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ dvs om $(A - \lambda I)\vec{v} = 0$.
- En vektor $\vec{v} \neq 0$ i \mathbb{R}^n kallas för en egenvektor till f med egenvärde λ om $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
- Egenvärdena till A ges som lösningen till den karakteristiska ekvationen (karakteristiska polynomet)

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

- Om $\det(A - \lambda I_n) = (x - \lambda)^k g(x)$ och $g(\lambda) \neq 0$ så kallas k för egenvärdet λ **algebraiska multiplicitet** (säger hur många gånger egenvärdet "repeteras").
- Låt λ vara ett egenvärde till A . **Egenrummet** till A som motsvarar egenvärdet λ betecknas med E_λ och ges av det nollskilda lösningsrummet till

$$(A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$$

- Notera att $E_\lambda = \ker(A - \lambda I_n)$.
- $\dim(E_\lambda) = \dim(\ker(A - \lambda I_n))$ kallas för den **geometriska multipliciteten** och motsvarar det största antalet linjärt oberoende egenvektorer för egenvärdet λ .
- Om $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ är egenvektorer till A som motsvarar olika egenvärden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ då är egenvektorerna $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ linjärt oberoende.

2. Uppgift. Tentamen 28/10-13, uppgift 3

Avbildningen $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bestäm egenvärden och egenvektorer till T .
- Rita upp egenrummen till T .
- Bestäm två linjärt oberoende egenvektorer till T .

d) Bestäm matrisrepresentationen av T med avseende på en bas av egenvektorer.

Diagonalisering

3. Exempel.

Vi har tidigare sagt att vissa problem kan förenklas genom ett smart val av en bas. Hur man väljer bas beror på vad man vill studera. Antag att matrisen A är given

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

och vi vill beräkna A^{100} . Hur? Om vi skriver upp $A^1, A^2, A^3 \dots$ så är det inte så enkelt att se ett mönster. Om vi däremot byter bas från standardbasen till basen $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ och } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

kan skriva matrisen A i den nya basen som $[A]_{\mathcal{B}} = S^{-1}AS$ om $S = P_{\mathcal{B} \rightarrow S}$ är basbyttematrisen från \mathcal{B} till standardbasen (kolonnerna i S ges av basvektorerna till \mathcal{B}). Vi får

$$[A]_{\mathcal{B}} = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Notera att det är enkelt att beräkna $[A]_{\mathcal{B}}^{100}$ eftersom det är en diagonalmatris. Notera även att A^{100} kan skrivas som

$$(S[A]_{\mathcal{B}}S^{-1})^{100} = S[A]_{\mathcal{B}} \underbrace{S^{-1}S}_{I_2} [A]_{\mathcal{B}} S^{-1} \dots S[A]_{\mathcal{B}} S^{-1} = S[A]_{\mathcal{B}}^{100} S^{-1} = S \begin{bmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & -1^{100} \end{bmatrix} S^{-1}.$$

4. Proposition. Om \vec{v} är en egenvektor till A med egenvärde λ , då är även \vec{v} en egenvektor till A^n med egenvärdet λ^n .

5. Definition. En $n \times n$ -matris A kallas för **diagonaliserbar** om det finns en bas \mathcal{B} sådan att $[A]_{\mathcal{B}}$ är en diagonalmatris. Vi säger att diagonalmatrisen $[A]_{\mathcal{B}}$ diagonaliserar A (alternativt säger vi att basen \mathcal{B} diagonaliserar A).

6. Proposition. Följande är ekvivalent

- (1) A är diagonaliserbar.
- (2) Det finns en inverterbar matris S sådan att $S^{-1}AS$ är en diagonalmatris. (vi säger att S diagonaliserar A).

7. Proposition. Om S är en $n \times n$ matris sådan att

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

då är kolonnerna i S egenvektorerna till A som motsvarar egenvärdena $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

8. Proposition.

- En $n \times n$ -matris A är diagonaliserbar om och endast om A har n linjärt oberoende egenvektorer (egenvektorerna utgör en bas för \mathbb{R}^n).
- En $n \times n$ -matris A med n distinkta egenvärden är diagonaliserbar. (Notera att det är möjligt att diagonalisera en $n \times n$ -matris A som inte har n distinkta egenvärden.)

9. Diagonalisering i steg

- (1) Beräkna egenvärdena.
- (2) Beräkna en bas för varje egenrum motsvarande varje egenvärde.
- (3) Låt basvektorerna för alla egenrum utgöra kolonnerna i en matris S (den diagonaliserande matrisen).
- (4) Bilda diagonalmatrisen $S^{-1}AS$ där diagonalelementen är egenvärdena till A .

10. Uppgift. Låt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

- a) Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer till A .
- b) Är A diagonaliserbar? I sådant fall, diagonalisera A och beräkna A^{111} .

Svar: a) $\lambda_1 = 5$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\lambda_2 = -1$, $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. b) Ja A är diagonaliserbar med $S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. $A^{111} = S \begin{bmatrix} 5^{111} & 0 \\ 0 & (-1)^{111} \end{bmatrix} S^{-1}$

11. Uppgift. Låt $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

- a) Bestäm egenvärden och motsvarande egenvektorer till A .
- b) Är A diagonaliserbar? I sådant fall, diagonalisera A och beräkna A^{111} .

Svar: Lös på samma sätt som uppgiften ovan. Notera att en triangulär matris har egenvärden på diagonalen.

12. Uppgift. Tenta 29/1914, uppgift 4, B-delen

En linjär avbildning $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ har egenvärdena $\lambda = 0, 1, 2$ och 4 . Låt A vara avbildningens standardmatris.

- a) Är A diagonaliserbar?
- b) Vilken dimension har bildrummet $\text{im}(T)$?
- c) Bestäm det karakteristiska polynomet till A .

Diagonalisering av symmetriska matriser

13. Proposition. Låt A vara $n \times n$ -matris. Följande är ekvivalent

- A är symmetrisk ($A = A^T$).
- Det finns en ortonormal bas som består av egenvektorer.
- Det finns en ortogonal matris S sådan att $S^T A S$ är en diagonalmatris med egenvärdena till A på diagonalen.

14. Proposition.

- En symmetrisk matris A kan alltid diagonaliseras.
- En symmetrisk matris egenvektorer från olika egenrum (motsvarar olika egenvärden) är ortogonala mot varandra.

15. Ortogonal diagonalisering i steg

- (1) Beräkna egenvärdena
- (2) Beräkna en bas för varje egenrum
- (3) Använd Gram-Schmidt för att göra om varje egenrumsbas till en ortonormal bas.
- (4) Låt basvektorerna för alla egenrum utgöra kolonnerna i en matris S (den diagonaliserande matrisen).
- (5) Bilda diagonalmatrisen $S^T A S$ där diagonalelementen är egenvärdena till A .

16. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- Kan A diagonaliseras?
- Hitta en bas som består av egenvektorerna till A .
- Hitta en ortonormal bas som består av egenvektorerna till A .
- Beräkna A^{100} .

Svar: a) A är en symmetrisk matris dvs den kan diagonaliseras.

$$b) \mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$c) \mathcal{B}_{ON} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

d) $A^{10} = SD^{10}S^T$ där kolonnerna i S ges av basvektorerna i ON-basen och D är en diagonalmatris med egenvärdena på diagonalen.

17. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{bmatrix}$$

- Kan A diagonaliseras?
- Hitta en bas som består av egenvektorerna till A .
- Hitta en ortonormal bas som består av egenvektorerna till A .
- Beräkna A^{100} .

Svar: Lös som uppgiften ovan.

18. **Uppgift.** Tenta 12/6-12, uppgift 5, B-delen

Låt $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara avbildningen som ges av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -1 & 7 & 2 \\ 7 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Det finns nollskilda vektorer sådana att

$$T(\vec{u}) = -7\vec{u} \quad \text{och} \quad T(\vec{v}) = 7\vec{v}$$

- a) Bestäm alla sådana vektorer \vec{u} och \vec{v} .
- b) Bestäm en ortogonal bas för \mathbb{R}^3 som består av egenvektorer till T .