F17:

Allmänt problem: Hur löser man ekvationer i metriska rum? Metriska rum är, i regel, oändliga och kan vara hur krångliga som helst.

Ta t. ex. $F(f)=0$ för någon f men mer eller mindre godtycklig funktion F? Lösningen existerar inte i allmänhet men kan vi hitta något villkor på F som säkerställer att lösningar existerar? Extremt generellt och abstrakt problem.

Låt oss försöka lösa $F(f(t))=0$ där

$$\left(F(f)=\right) \quad \frac{df(t)}{dt} - g(f(t)) = 0 .$$

i rummet

$$C^1((-\tau,\tau)) = \{ f(t);\ f \in C^0(-\tau,\tau),\ f' \in C^0(-\tau,\tau) \}$$

med norm $\|f\|_{C^0(-\tau,\tau)} + \|f'\|_{C^0(-\tau,\tau)}$.

Vi börjar med ett "förslag"

Sats (Banach Contraction principle): Antag att $F: M \mapsto M$ så att (M komplett metriskt rum).

$$d(F(f),F(f)) < \lambda\, d(f,f) \quad \text{för } \lambda < 1.$$

då existerar det ett $f \in M$ så att

$$F(f) = f. \qquad (*)$$

Vidare så är f unikt.

Bevis: Välj ett $x_0 \in M$ godtyckligt och

definiera itterativt $f(x_j) = x_{j+1}$.

Steg 1 x_j är en Cauchy följd.

$$d(x_j, x_k) \leq \sum_{l=j}^{k-1} d(x_l, x_{l+1}) \qquad (*)$$

så det räcker med att hitta en tillräckligt bra skattning av $d(x_l, x_{l+1})$. Men

$$d(x_l, x_{l+1}) = d(F(x_{l-1}), F(x_l)) < \lambda\, d(x_{l-1}, x_l) <$$

$$< \dots < \lambda^l d(x_0, x_1) \leq C\lambda^l.$$

sätt in i $(*)$ så får vi

$$d(x_j, x_k) \leq C \sum_{l=j}^{k-1} \lambda^l < C \sum_{l=j}^{\infty} \lambda^l = \frac{C}{1-\lambda} \lambda^j.$$

Eftersom $0 \leq \lambda < 1$ så kommer $\exists N_\varepsilon$ så $j > N_\varepsilon$

$\Rightarrow \frac{C\lambda^j}{1-\lambda} < \varepsilon$ dvs

$j, k > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_j, x_k) < \varepsilon$.

Så x_j är Cauchy.

Steg 2 Låt $x_j \to f$ (x_j konvergerar då x_j Cauchy och $\mathcal{M}$ komplett)

då kommer $F(f) = f$.

Detta är extremt viktigt. ~~Men är sagen att~~

~~dvs~~ $\lim_{j\to\infty} F(x_j) = \lim_{j\to\infty} x_{j+1} = f$.

Så om F är kontinuerlig så att

$\lim_{j\to\infty} F(x_j) = F(\lim_{j\to\infty} x_j) = F(f)$ så är vi klara.

Men F måste vara kontinuerlig eftersom om $x \to f$ så kommer

$$d(F(f), F(x)) < \lambda\, d(f,x) \to 0,$$

dvs $F(x) \to F(f)$ då $x \to f$.

$\blacksquare$

Differentialekvationer.

Vi vill lösa

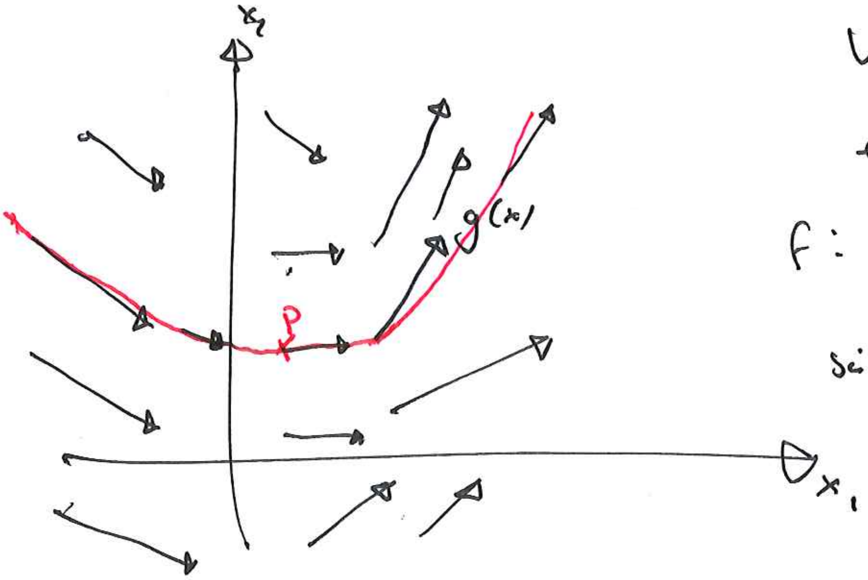
$$f'(t) = g(f(t)) \qquad \text{för } t \text{ "nära noll"}$$

$$f(0) = p.$$

Dvs, $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)) \in C^1$.

Låt oss påminna oss om lite allt trams.

$g(x)$ är ett vektorfält



Vi letar efter en avbildning

$f : (-\tau, \tau) \to \mathbb{R}^n$

så att $f'(t) = g(f(t))$.

För att lösa detta så kommer vi att formulera om problemet som

$$f(t) = p + \int_0^t g(f(s))\,ds. \qquad (1)$$

Då kommer $f(0) = p + \int_0^0 g(f)\,dt = p$.

Och, analysens huvudsats $f'(t) = g(f(t))$.

Så om vi kan lösa ① så kan vi lösa diff ekv.

Tricket är att definiera

$$F(f)(t) = p + \int_0^t g(f(s))\,ds .$$

Då kommer en fixpunkt till F, dvs $f = F(f)$, att vara en lösning till diff ekvationen.

För att F skall ha en fixpunkt så behöver vi bara visa att det är en sammandragning – detta innebär i realiteten att vi måste hitta villkor på g som säkerställer att F är en sammandragning.

Låt oss formulera en sats

Sats: (Picard's Sats).

Antag att $g: \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ är Lipschitz

$|g(x) - g(y)| \leq L\,|x-y|$ för något L och begränsad.

Då existerar det en unik lösning ~~till~~ $f \in C^1(-\tau, \tau)$

$$f(t) = p + \int_0^t g(f(s))\,ds$$

för där $\tau > 0$ endast beror på L och M.
$(\tau < \frac{1}{L})$

Kommentar $f(t) = p + \int_0^t g(f(s))\,ds$ $f \in C((-\tau, \tau))$

$\Longrightarrow$ $f \in C^1((-\tau, \tau))$ Aprioriskattning.

Bevis: Tricket är naturligtvis att visa att

$$F(f)(t) = p + \int_0^t g(f(s))\,ds$$ har en fixpunkt

i $C^0([-\tau,\tau])$. För detta så räcker det att visa

att F är en sammandragning; för $u,v \in C^0(-\tau,\tau)$:

$$\left|F(u)(t) - F(v)(t)\right| \leq \left|\int_0^t \underbrace{|g(u(s)) - g(v(s))|}_{\leq L|u(s)-v(s)|}\,ds\right| \leq \left|L\,\|u-v\|_{C^0}\int_0^t ds\right|$$

$$\leq L\tau\,\|u-v\|_{C^0} = \lambda\,\|u-v\|_{C^0} \quad \text{om } |t|<\tau$$

så om $L\tau =: \lambda < 1$ så har F en

fixpunkt. (Banach's fixpunktsats.) $\blacksquare$

FLERVARIABELANALYS.

Vi måste börja med lite linjär algebra innan vi kan göra flervariabelanalys.

Vi kommer att betrakta linjära avbildningar $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som en matris precis som i linalgen. Men vi vill inkorporera linjära avbildningar i vårt analytiska tänkande.

Vi börjar med att observera att alla avbildningar $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, eller mer allmänt alla avbildningar mellan två vektorrum: $T: V \to W$ former ett metriskt rum med metrik

$$d(T,L) = \|T-L\| = \sup_{\substack{v \in W \\ |v| \neq 0}} \frac{|Tv - Lv|}{|v|}.$$

Sats: Låt $T: V \to W$ vara en linjär avbildning då kommer följande att vara ekvivalenta.

a) $\|T\| < \infty$

b) T är likformigt kont.

c) T är kont.

d) T är kont i origo.

Bevis: Om $\|T\| = \sup \frac{|T(v)|}{|v|} < \infty$

så ~~kommer~~ $|T(v) - T(w)| \leq \|T\| \, |v - w|$

så ~~om~~ för alla $\varepsilon > 0$ så existerar $\delta = \varepsilon/\|T\|$ så att

$|v - w| < \delta \Rightarrow |T(v) - T(w)| < \varepsilon$.

Dvs Likformig kont. Så a) $\Rightarrow$ b)

b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ d) är uppenbart.

Vi behöver bevisa att d) $\Rightarrow$ a)

Men d) säger att $\exists \delta > 0$ så att

$|v| < \delta \Rightarrow |T(v) - \underbrace{T(0)}_{=0}| < 1$

Men det betyder att

$$\frac{|Tu|}{|u|} = \frac{\left|T\left(\frac{\delta u}{\|u\|} \cdot \frac{\|u\|}{\delta}\right)\right|}{|u|} = \{T \text{ lin.}\} = \frac{|u|}{\delta |u|} \left|T\left(\frac{\delta u}{|u|}\right)\right| < \frac{1}{\delta}$$

för alla $u \neq 0$ så $\|T\| < \frac{1}{\delta}$.

Observera att vi antar inte att $V, W = \mathbb{R}^n$.

Detta gäller i alla möjliga vektorrum.

Exempel: Låt $V = \{ C^0([0,1])$, $W = \mathbb{R}$ och

$$T(v) = \int_0^1 v(x)\,dx$$ då kan

$$v_j \rightrightarrows 0 \Rightarrow T(v_j) \to T(0) = 0.$$

så T är kontinuerlig i origo.

Det följer att T är likformigt kont. på $C^0([0,1])$.

Sats: Varje linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \to W$ (metrikt ~~vektorrum~~ i) är kontinuerlig.

2) Om $T: \mathbb{R}^n \to W$ är en isomorfi (bijektiv ~~surjektiv~~ inverterbar) då är T en homeomorfi.

Bevis: 1) ~~Skriv~~ Räcker med att visa att $\|T\| < M$.

Men för varje vektor $v \in \mathbb{R}^n$ kan vi skriva $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ $\quad e_i = (0, \dots, 1, 0 \dots)$

så $|Tv| = |\sum v_i T e_i| = \sum |v_i||Te_i| \le n|v| \max(|Te_1|, \dots, |Te_n|)$

2) (Problem om W är oändligdim.)

(Men $Te_1, Te_2, \dots, Te_n$ måste spänna upp W.)

Låt oss visa att T^{-1} är begränsad.

dvs $\sup_{v \in W} \frac{|T^{-1}(v)|}{|v|} < \infty$ men $\sup_{v \in W} \frac{|T^{-1}(v)|}{|v|} = \sup_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{|v|}{|Tv|}$

$= \sup_{|v|=1} \frac{1}{|Tv|}$ Observera att $S_1 = \{v \in \mathbb{R}^n : |v| = 1\}$ kompakt

Så $T(S_1)$ är kompakt $\Rightarrow$ $T(S_1)$ sluten

$\Rightarrow$ ~~dist (T,~~ Men $0 \notin T(S_1)$ (eftersom $T(0)=L$ och T inj.)

Så avståndet mellan två ~~slutna~~ kompakta mängder är välddefinierat så $\operatorname{dist}(0, T(S_1)) \geq c > 0$

Det följer att $\sup \frac{1}{|T(u)|} \leq \frac{1}{c} < \infty$

dvs $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{c}$ så T^{-1} kont.