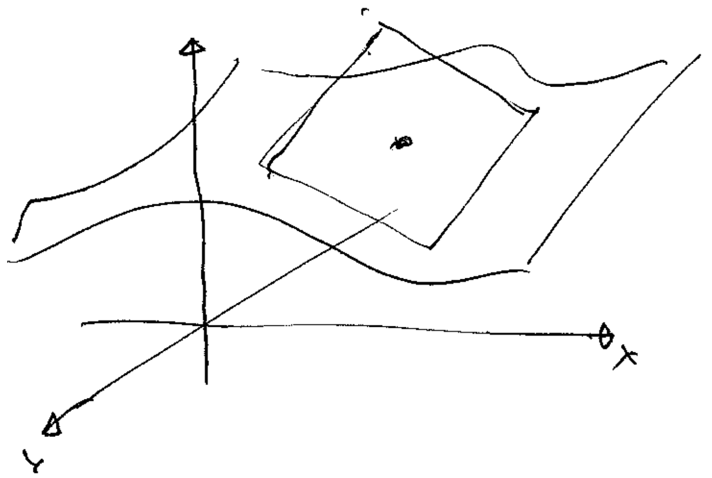
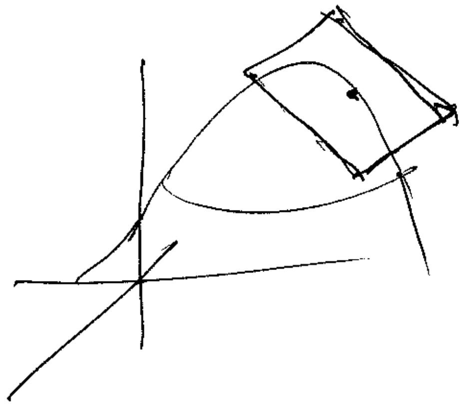
F18

Låt oss påminna oss lite om flervariabelanalys. Först så definierar vi differentierbarhet – dvs. möjligheten att approximera $f(\bar{x})$ med en affin funktion

Definition: Vi säger att en funktion $f: U \to \mathbb{R}^m$ ($U \subset \mathbb{R}^n$, öppen) är differentierbar i $p \in U$ med derivata $(Df)_p = T$, där $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ är en linjär avbildning, om

$$f(p+v) = f(p) + Tv + R(v) \quad \text{där} \quad \lim_{|v| \to 0} \frac{R(|v|)}{|v|} = 0.$$





Sats: f differentierbar i $p \subset U \Rightarrow f$ kont i p.

Bevis

$$|f(p+v) - f(p)| = |T(v) + R(v)| \leq M|v| + |R(v)| \to 0.$$

Problemet med $(Df)_p$ är att den kan, i allmänhet, vara lite knepig att beräkna. Lättare att beräkna är partiella derivatorna.

Def: Låt $f : U \to \mathbb{R}^m$, ($U \subset \mathbb{R}^n$ öppen) då säger vi att den ij:te partiella derivatan ~~av~~ i p är

$$\frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} = \lim_{h \to 0} \frac{f_i(p + he_j) - f_i(p)}{h} \qquad \left(f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)\right)$$

om gränsvärdet existerar.

Kommentar: Den vanliga derivatan

$\dfrac{df(x)}{dx}$ är kvoten till variabeln x så

"vi byter x mot $x+h$" i första instansen i diff kvoten. Så $\dfrac{d\, f(x, x^2)}{dx} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h, (x+h)^2) - f(x)}{h}$.

Partiella derivatan är kvoten till funktionen.

För partiella derivator så har varje variabel ett namn och, $f(\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\text{namn på variablerna}})$, h läggs till till den variabelposition som har namnet x_i i $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $\Big\|$ $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(\ldots, \overset{\text{pos. i}}{x_i + h}, \ldots) - f}{h}$

Sats: Om f är differentierbar i p så är

$$(Df)_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(p)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ & & & \frac{\partial f_m(p)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Specifikt så existerar alla partiella derivator.

Bevis: Enkelt.

$$f(p+v) = f(p) + T(v) + \mathbb{R}(v) \qquad \text{så}$$

$$\underbrace{\frac{f(p+e_i h) - f(p)}{h}}_{\to \left(\frac{\partial f(p)}{\partial x_i}, \frac{\partial f_2(p)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}\right)^T} = \frac{hT(e_i)}{h} + \overbrace{\frac{\mathbb{R}(he_i)}{h}}^{\to 0}$$

$$\text{så} \qquad T(e_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_i} \end{bmatrix}.$$

$\blacksquare$

Kommentar: Observera att motsatsen inte gäller

$\frac{\partial f_j(p)}{\partial x_i}$ existerar betyder inte att f är differentierbar.

T.ex. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & x,y \neq 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$

då $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0 \qquad \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$

men f är inte ens kontinuerlig i $(0,0)$

eftersom $\lim_{t \to 0^+} f(t,t) = \lim_{t \to 0} \dfrac{t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{1}{2} \neq f(0,0) = 0.$ $\boxtimes$

Men om de partiella derivatorna är kontinuerliga så är f differentierbar

Sats: $f : U \to \mathbb{R}^m$, om $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ är kontinuerliga i en omgivning av p då existerar $(Df)(p)$

Bevis: Det positiva är att vi vet vad vi ska få för linjär avbildning: $\left[\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right] \stackrel{\text{def}}{=} A$ Så vi ska visa att

$$|f(p+v) - f(p) - Av| = |R(v)| \longrightarrow 0$$

~~Men~~ Eftersom de partiella derivatorna existerar så har vi kontroll över f längs koordinataxlarna. och vi kan skriva

$$f_i(p+v) - f_i(p) = \big(f_i(p+v) - f_i(p+(v_1,\dots,v_{n-1},0))\big)$$
$$+ \big(f_i(p+(v_1,\dots,v_{n-1},0)) - f_i(p+(v_1,v_2,\dots,v_{n-2},0,0))\big) +$$
$$+ \big(f_i(p+(v_1,0,\dots,0)) - f_i(p)\big) =$$

$= \left\{ \begin{matrix} \text{integralkalk} \\ \text{medelvärdessats} \end{matrix} \right\} = v_n \dfrac{\partial f_i(p_{in})}{\partial x_n} + v_{n-1} \dfrac{\partial f_i(p_{i,n-1})}{\partial x_{n-1}} + \dots + \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1} v_1$

~~Så~~ Där p_{ij} ligger mellan $p + (v_1, .., v_{j-1}, 0, ..0)$ och $p + (v_1, .., v_j, 0..)$

$$\frac{\left| f_i(p+v) - f_i(p) - (Av)_i \right|}{|v|} \leq \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_i(p_{ij})}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} \right| \cancel{\frac{|v_j|}{|v|}} \qquad (*)$$

Men $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ är kontinuerlig kring p och eftersom

$|p_{ij} - p| < |v|$ så existerar det $\forall \varepsilon > 0$ ett $\delta > 0$ så

att $|v| < \delta \Rightarrow \left| \dfrac{\partial f_i(p_{ij})}{\partial x_j} - \dfrac{\partial f_i(p)}{\partial x_j} \right| < \varepsilon$

så $\dfrac{(*)}{|v|} \to 0$ då $|v| \to 0$

Sats: Derivationsregler

a) $D(af + bg) = a\,Df + b\,Dg \qquad a, b \in \mathbb{R}, \quad f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differentierbara

b) $Da = 0 \qquad a \in \mathbb{R}$

c) $D(f \circ g) = Df \circ Dg = Df(g(p)) \cdot Dg(p)$

Bevis c): ~~$D(f(g(p$~~ $\quad f(q+v) = f(q) + T_f\, w + R_f(|w|)$

$g(p+w) = g(p) + T_g\, w + R_g(|w|)$

om $g(p) = q$ så får vi med $w = T_g\, w$

~~$f(g(p)+\dots$~~

$$f(g(p+v)) - f(g(p)) = f(\underbrace{g(p)}_{q} + \underbrace{T_g v + R_g(v)}_{w}) - f(\underbrace{g(p)}_{q})$$

$$= \cancel{f(q)} + T_f(T_g v + R_g(v)) + R_f(T_g v + R_g(v)) - \cancel{f(q)}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} T_f \\ \text{linjär} \end{matrix} \right\} = T_f T_g v + \quad T_f(R_g(v)) + R(T_g v + R_g v)$$

Men $\quad \frac{R_g(v)}{|v|} \to 0 \qquad$ och $\quad |T_f w| \le M_f |w|$

$$|T_g v| \le M_g |v|$$

Så

$$\Bigg| \underbrace{\frac{R_f(\overbrace{T_g v + R_g(v)}^{|\cdot| \le 2M|v|})}{|v|}}_{M \left|\frac{R_f(u)}{|u|}\right| \to 0} + \underbrace{\frac{T_f(R_g(v))}{|v|}}_{M_f \frac{|R_g(v)|}{|v|} \to 0} \Bigg| \to 0$$

då $\quad |v| \to 0$

Så $\quad f(g(p+v)) - f(g(p)) = T_f T_g v \quad + \underbrace{\text{rest}}_{\cancel{\to 0 \text{ då } |v| \to 0}}$

$= o(|v|)$.

<u>Sats</u>: [Medelvärdessatsen]. $f: U \to \mathbb{R}^m$ och hela linjesegmentet från p till q ligger i U.

Då kan

$$|f(p) - f(q)| \leq M|p-q|$$

där $M = \sup_{x \in [p,q]} |Df(x)|$

<u>Bevis</u>: Låt

$g(t) = \langle v, f(p+t(q-p))\rangle$ definierad på $t \in [0,1]$

då kan vi, enl. 1-dim medelvärdessatsen,

$$g(1) - g(0) = \langle v, f(q) - f(p)\rangle = \langle v, Df(p+\theta(q-p))\cdot(q-p)\rangle$$

för något $\theta \in (0,1)$. Välj $v = f(q) - f(p)$ ger

$$|f(q) - f(p)|^{2} = \langle f(q)-f(p), Df(p+\theta(q-p))\cdot(q-p)\rangle$$

$$\leq \cancel{|f(q)-f(p)|}\,|Df(p+\theta(q-p))\cdot(q-p)| \leq M|q-p|$$

$\blacksquare$

<u>Sats</u>: Antag att $U \subset \mathbb{R}^n$ är öppen och sammanhängande och $f: U \to \mathbb{R}^m$ är differentierbar och $Df(x) = 0$ för alla x. Då är f konstant.

<u>Bevis</u>! Låt $p \in U$ och låt $U_p = \{x \in U;\ f(x) = f(p)\}$

<u>steg 1</u>: U_p är öppen.

Eftersom U är öppen så kommer, för varje $q \in U_p$, $M_\delta(q) \subset U$. Men medelvärdessatsen säger att för $r \in M_\delta(q)$ så

$$|f(q) - f(r)| \leq \underbrace{\sup(Df)}_{=0} \, |q - r| = 0$$

(Vi använder här att hela linjen $[q, r] \subset M_\delta(q)$)

så $f(p) = f(q) = f(r)$ i hela omgivningen $M_\delta(q)$
$q \in U_p$

så $q \in U_p \Rightarrow M_\delta(q) \subset U_p$ dvs U_p öppen

<u>steg 2</u>: U_p är sluten i U.

f differentierbar $\Rightarrow$ f kont $\Rightarrow$ ~~$f(x)$~~

$\{x \in U;\ f(x) = f(y)\}$ är sluten

3

<u>Sats:</u> Låt $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ vara kompakt och

$$f : K \times (a,b) \longmapsto \mathbb{R} \qquad \text{samt} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n} : K \times (a,b) \longmapsto \mathbb{R}$$

vara kontinuerliga. Då kommer

kont. deriverbar (a,b)

$$F(x_n) = \int_K f(x', x_n)\, dx' \qquad \text{att vara } \cancel{C^1(a,b)}$$

och
$$\frac{\partial F(x_n)}{\partial x_n} = \int_K \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\, dx'.$$

<u>Bevis:</u> $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ kont. på $K \times [x_n - \delta, x_n + \delta]$

för δ så litet att $[x_n - \delta, x_n + \delta] \subset (a,b)$.

så $\frac{\partial f}{\partial x_n}$ är likformigt kont. Dvs

~~om~~ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists h_\varepsilon$ så $\left| \frac{\partial f(x', x_n + h)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right| < \varepsilon$

för $|h| < h_\varepsilon$. Där får så

$$\frac{F(x_n + h) - F(x_n)}{h} = \frac{1}{h} \int_K \int_{x_n}^{x_n + h} \frac{\partial f(x', s)}{\partial x_n}\, ds\, dx' =$$

$$= \int_K \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n + h} \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}\, ds}_{= \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n}}\, dx' + \underbrace{\int_K \underbrace{\frac{1}{h} \int_{x_n}^{x_n + h} \underbrace{\left(\frac{\partial f(x', x_n + s)}{\partial x_n} - \frac{\partial f(x', x_n)}{\partial x_n} \right)}_{-\varepsilon < \quad < \varepsilon} ds}_{-\varepsilon < \quad < \varepsilon} dx'}_{-\varepsilon |K| < \quad < \varepsilon |K|}$$

Så

$$\left| \frac{F(x_n + h) - F(x_n)}{h} - \int_K \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \, dx' \right| < \varepsilon |K|$$

för $|h| < h_\varepsilon$. $\Rightarrow$ satsen.

Att $\frac{\partial F}{\partial x}$ är kontinuerlig (visas som övning.