Sats [Variabelbytesformel]: Antag att $R \subset \mathbb{R}^2$ är en rektangel och att

$$\ell : U \longmapsto \mathbb{R}^2 \quad \text{är en diffeomorfi}$$

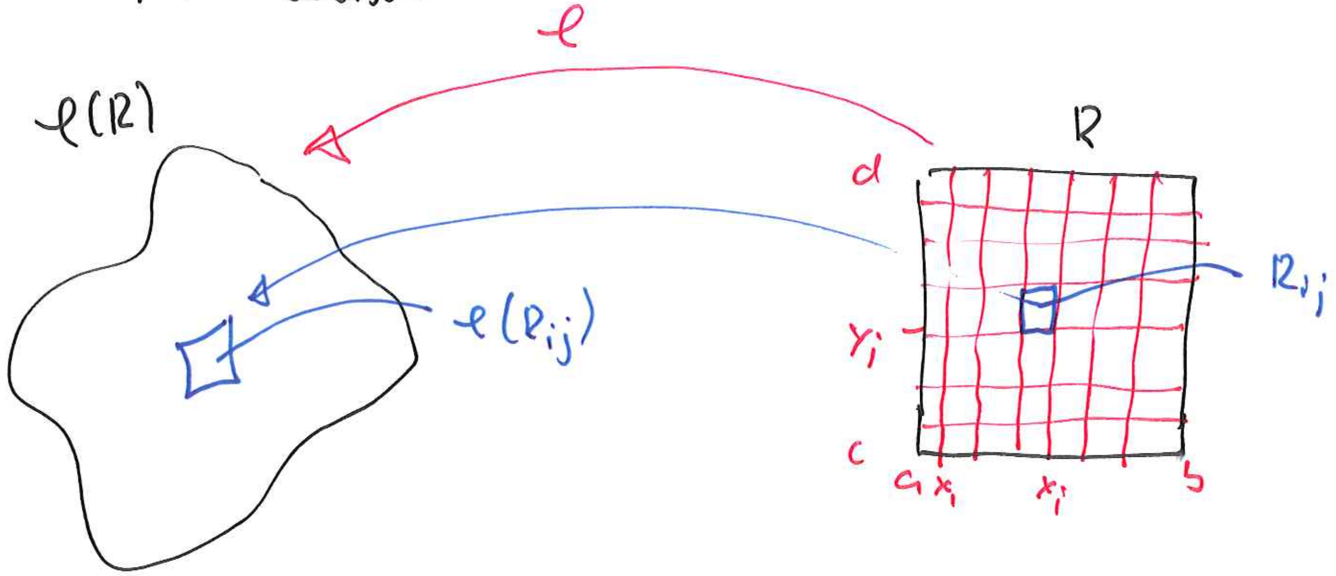
($\ell \in C^1$ och $(D\ell)_x$ är inverterbar för varje x samt ℓ är en bijektion från U till $\ell(U)$) och att $\overline{R} \subset U$ (U öppen).

Antag vidare att f är Riemannintegrerbar på $\ell(R)$.

Då kommer

$$\int_R f \circ \ell(x) \, |\mathrm{Jac}_x \ell| \, dx = \int_{\ell(R)} f(x) \, dx$$

Idée för beviset



$\int_{\varphi(R)} f \, dx$ existerar så vi kan ~~göra en indelning~~ ~~[illegible]~~ approximera $\int_{\varphi(R)} f$ med ~~en~~ $L(f,G)$ & $U(f,G)$

vi behöver flytta den informationen till R.

Så om vi gör en indelning av R $\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $\quad c = y_0 < y_1 \dots < y_m = d$

Så kommer vi att få en indelning av $\varphi(R)$ genom ~~att~~ $\varphi(R_{ij})$ $\quad R_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$.

~~Om vi kan upp~~ Vi borde alltså kunna skriva

$$\int_R f \circ \varphi \, |Jac_x(\varphi)| \, dx = \sum_{ij} \int_{R_{ij}} f \circ \varphi \, |Jac \, \varphi| \, dx$$

och

$$\int_{\varphi(R)} f \, dx = \sum_{ij} \int_{\varphi(R_{ij})} f \circ \varphi \, |Jac(\varphi)| \, dx$$

Vill ha lika

Så vi vill visa (det räcker i alla fall)

$$\int_{\mathbb{R}_{ij}} f \circ \varphi(x) \, |\mathrm{Jac}_x \varphi| \, dx = \int_{\varphi(R_{ij})} f(x) \, dx.$$

men om R_{ij} är liten så kommer, R_{ij} centrum i z_{ij},

$$\varphi(x) = \underbrace{\varphi(z_{ij}) + (D\varphi)_{z_{ij}}(x - z_{ij})}_{\text{Linjär transformation (affin för att vara exakt)}} + \underbrace{R_{ij}(x - z_{ij})}_{\text{Väldigt liten om } R_{ij} \text{ liten.}}$$

Så vi ska göra två saker, och en till som inte är liten uppenbar verkar.

1) Se vad en linjärtransformation gör med integralen.

2) Undersöka hur R_{ij} "stör linjär approx"

~~[illegible]~~

3) Vi måste också titta på vad en diffeomorfi gör med nollmängder för att kunna visa att $f \circ \varphi \, |\mathrm{Jac}_x(\varphi)|$ är integrerbar.

Steg 1:

Hjälpsats: Antag att $\chi_S(x) = \begin{cases} 1 & x \in S \\ 0 & x \notin S \end{cases}$

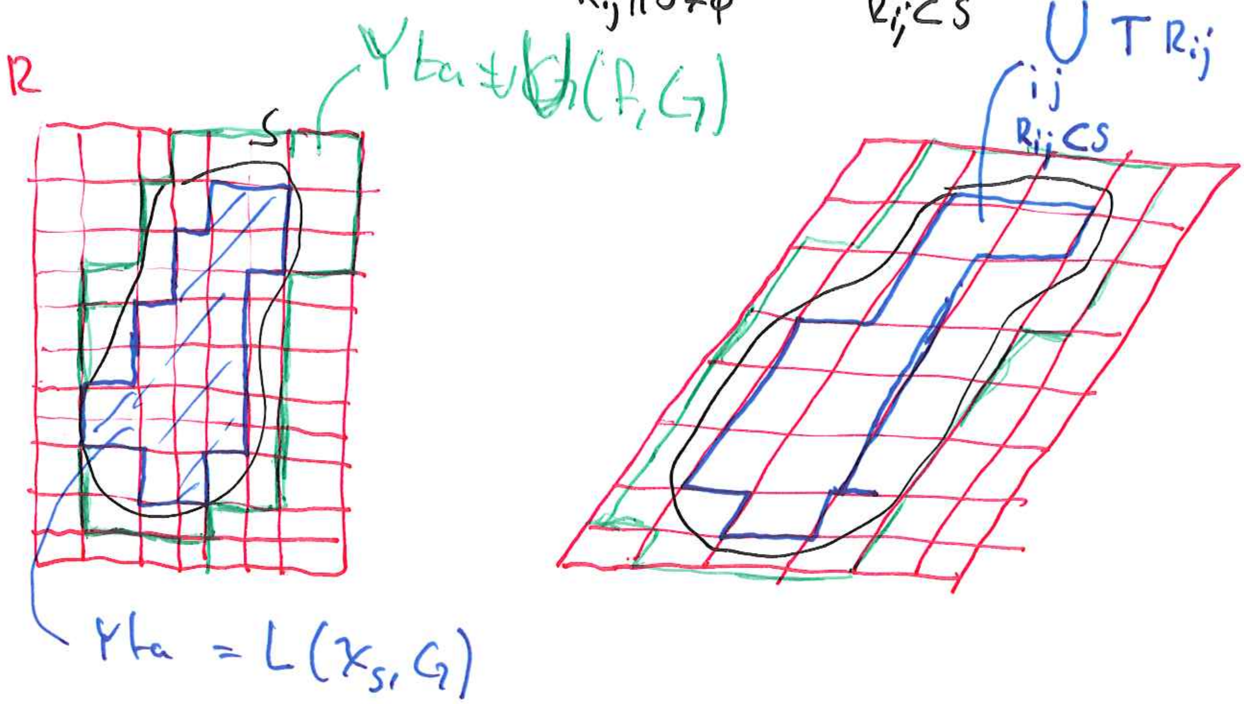
är integrerbar och att $T : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ är en linjär avbildning. Då kommer

$$|\det T| \int \chi_S(x)\,dx = \int \chi_{TS}(x)\,dx .$$

Bevis: Eftersom χ_S är integrerbar så finns det en indelning $G = \begin{cases} a = x_0 < x_1 \dots x_n = b \\ c = y_0 < y_1 < \dots y_m = d. \end{cases}$

så att

$$U(\chi_S, G) - L(\chi_S, G) = \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \cap S \neq \emptyset}} |R_{ij}| - \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \subset S}} |R_{ij}| < \varepsilon$$



Men eftersom

$$\int \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \subset S}} \chi_{R_{ij}^\circ} \leq \int \chi_S \leq \int \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \cap S \neq \emptyset}} \chi_{\overline{R_{ij}}} \to \int \chi_S \quad \text{då } |R_{ij}| \to 0$$

Så kommer

$$\int \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \subset S}} \chi_{T R_{ij}^\circ} \leq \int \chi_{TS} \leq \int \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \cap S \neq \emptyset}} \chi_{T \overline{R_{ij}}} \qquad = |\det T| \int \sum_{\substack{i,j \\ R_{ij} \cap S \neq \emptyset}} \chi_{R_{ij}} \to \int \chi_S$$

Så om vi kan visa att

$$|\det T| \int \chi_{R_{ij}} = \int \chi_{T R_{ij}}$$

så följer det att

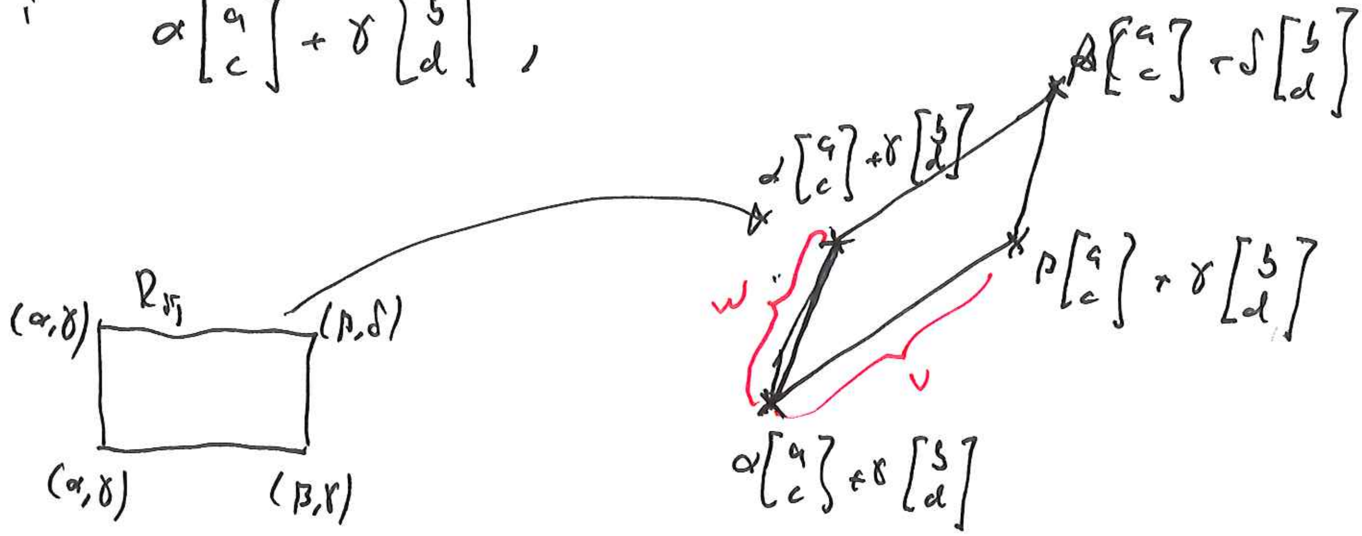
Men

$\int \chi_{T R_{ij}}(x)\,d\mu$ kan beräknas som ytan

av $T(R_{ij})$. Om R_{ij} är en rektangel

$R_{ij} = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ och $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

så blir $T R_{ij}$ = Parallellogramet med hörn i $\alpha\begin{bmatrix}a\\c\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}b\\d\end{bmatrix}$,

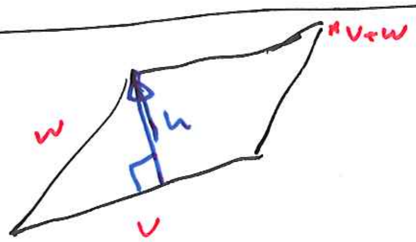


Det är elementär geometri att beräkna ytan av parallellogramet. Och det gäller

$$|TR_{ij}| = |\det T|\,|R_{ij}|.$$

$\boxed{2}$

<u>Steg 2</u> Var att se vad som händer när transformationen nästan är linjär.



$$h = w - \frac{w\cdot v}{|v|^2}v = \frac{w|v|^2-(w\cdot v)v}{|v|^2}$$

Så ytan $=$ bas $\cdot$ höjd $= |v|\,|h| = \left|\frac{w|v|^2-(w\cdot v)v}{|v|}\right| = \det\left|v \ w\right|$

Hjälpsats: Om vi låter $R_r(z)$ vara en ~~rekt~~ kvadrat med sidlängd r och centrum i z

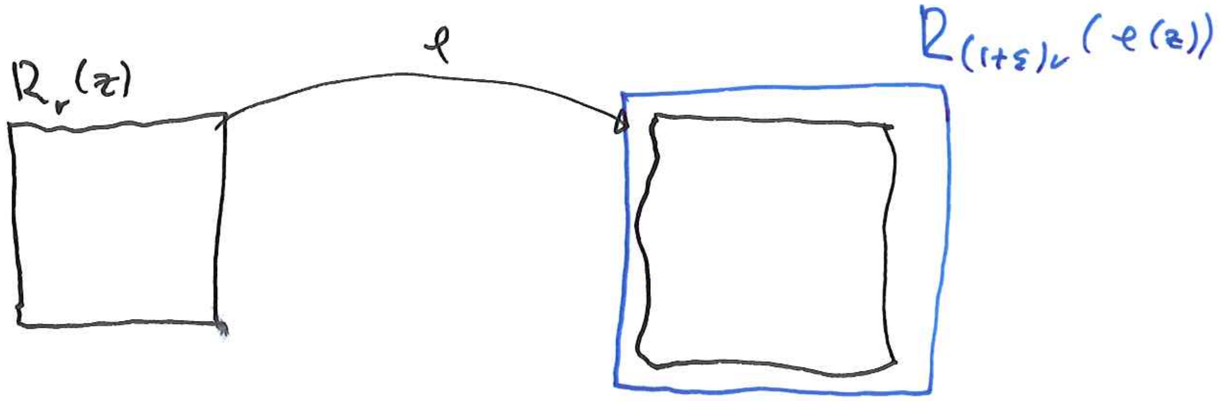
och

$\varphi : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ så att $\varphi \in C^1(R_r(z))$ och

$\underbrace{\|(D\varphi)_x - \mathrm{Id}\| < \varepsilon}_{\varphi \text{ är nära konstantavbildningen}}$ för alla $x \in R_r(z)$

Då kommer

$$\boxed{\varphi(R_r(z)) \subset R_{(1+\varepsilon)r}(\varphi(z))}.$$



Bevis: Enl. medelvärdessatsen så

$$\varphi(z+u) - \varphi(z) = \int_0^1 (D\varphi)_{z_0+tu}(u)\,dt =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left((D\varphi)_{z+tu} - \mathrm{Id}\right)}_{\|\cdot\| < \varepsilon}(u)\,dt + \underbrace{\int_0^1 \mathrm{Id}(u)\,dt}_{=u}$$

Så om vi tittar på $e_1 = (1,0)$ koordinaten av $\ell(z+u) - \ell(z)$ så får vi

$$\left| e_1 \cdot (\ell(z+u) - \ell(z)) \right| \leq |e_1 \cdot u| + \varepsilon |u| < r + \varepsilon \underbrace{r\sqrt{2}}_{|u| \leq \sqrt{2}\, r \text{ om } u \in R_r}$$

Samma sak för e_2 koordinaten.

Dvs $\ell(z+u) \subset R_{(1+\varepsilon\sqrt{2})r}(\ell(z))$.

$\blacksquare$

<u>Hjälpsats</u>: Om S är en nollmängd i $\mathbb{R}^2$ och $\ell : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^2$ är lipschitz

Då kommer $\ell(S)$ att vara en nollmängd.

<u>Bevis</u>: Om S är en nollmängd så finns det rektanglar R_j så $S \subset \bigcup R_j$ och $\sum_{j=1}^{\infty} |R_j| < \varepsilon$.

Låt oss säga kvadrater

Men eftersom ℓ är lipschitz

Så kommer
$$\ell(R_j) \subset \hat{R}_j \text{ där}$$

$|\hat{R}_j| \leq 4L^2 |R_j|$ där L är lipschitz konstanten

$$|\ell(x) - \ell(y)| \leq L|x-y|$$

Eftersom R_j ligger i en disk med radie $\sqrt{2}\cdot$ halva sidlängden $r/2$ vilken avbildas på en disk $M_{\sqrt{2}Lr/2}$

Men en disk med radie $\frac{Lr_j}{\sqrt{2}}$ ligger i en kvadrat $\hat{R}_j$ med sidlängd $2Lr_j$, dvs yta $4L^2 r_j^2 = 4L^2 |R_j|$.

Så det finns en övertäckning av $f(S)$, $\hat{R}_j$ så att

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{R}_j| < 4L^2 \varepsilon.$$

Men $\varepsilon > 0$ var godtyckligt så $f(S)$ är en nollmängd.

$\blacksquare$

Bevis av variabelbytes formeln:

Steg 1: $f \circ \varphi \, |\mathrm{Jac}_x \varphi|$ är integrerbar på R.

Eftersom f är integrerbar (på $\varphi(R)$) så är mängden av diskontinuiteter D en nollmängd. Diskontinuitetsmängden för $f \circ \varphi$ är $\varphi^{-1}(D)$. Men eftersom $(D\varphi)_x^{\sharp}$ är inverterbar och $\varphi \in C^1$ så är φ^{-1} en inverterbar C^1 funktion enl. inversa funktionssatsen. Men det innebär att φ^{-1} är Lipschitz (C^1 funktioner är Lipschitz enl. medelvärdessatsen)

Så $\varphi^{-1}(D)$ är en nollmängd enl. föregående hjälpsats. Eftersom $(D\varphi)_x$ är kontinuerlig så är $|\mathrm{Jac}_x \varphi| = |\underbrace{\det(D\varphi)_x}_{\text{polynom}}|$ kontinuerlig.

Så diskontinuitetsmängden för $f \circ \varphi \, |\mathrm{Jac}_x \varphi|$ är en nollmängd.

Vidare så är $f \circ \varphi \, |\mathrm{Jac}_x(\varphi)|$ begränsad på R eftersom f är det och $|\mathrm{Jac}_x(\varphi)|$ kont på $U \supset \overline{R}$.

Steg 2: Integralerna är lika.

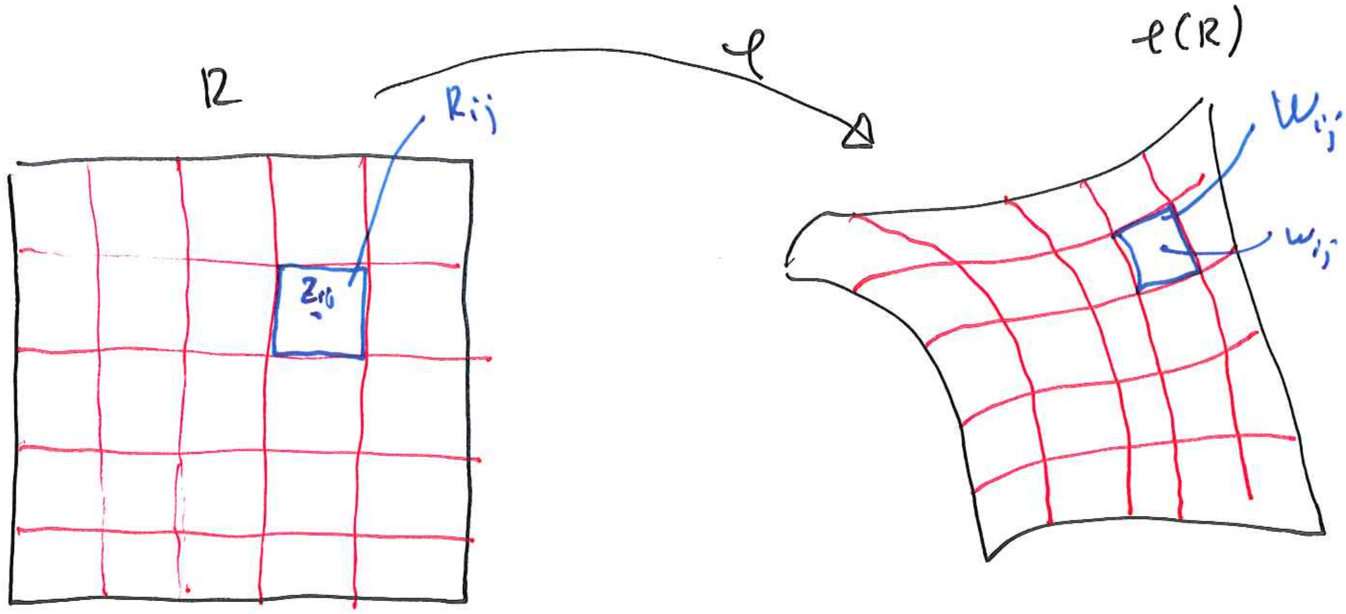
Vi gör en indelning av R i rektanglar R_{ij} $\left(R_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j),\quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,\ c = y_0 < \dots < y_m = d \right)$ där diametern av alla rektanglar är mindre än $r > 0$, där r är litet och kommer att väljas senare.

Vi antar att centrum i R_{ij} är z_{ij} och gör Taylor approximationen

$$e(z) = e(z_{ij}) + (De)_{z_{ij}}(z - z_{ij}) + R_{ij}(z - z_{ij})$$

Vi skriver $w_{ij} = e(z_{ij})$ och $A_{ij} = (De)_{z_{ij}}$.

Vidare låter vi $W_{ij} = e(R_{ij})$



I R_{ij} så vill vi approximera ℓ med

$$\ell_{ij}(z) = w_{ij} + A_{ij} \cdot (z - z_{ij})$$

Då kommer

$$\Psi = \phi_{ij}^{-1} \circ \ell \quad \text{att uppfylla}$$

$$\Psi(z_{ij}) = \phi_{ij}^{-1}(w_{ij}) = z_{ij}.$$

~~Och, eftersom $(D\ell)_x$ är kontinuerlig,~~
~~så kommer~~

$$D\Psi = (D\ell_{ij}^{-1})(D\ell) = A_{ij}^{-1}\left(A_{ij} + (DR_{ij})_x\right) =$$

$$= Id + A_{ij}^{-1}(DR_{ij})_x$$

men eftersom $(DR_{ij})_x$ är kont och $(DR_{ij})_x \to 0$ då $x \to z_{ij}$ så kommer

$$\|(DR_{ij})_x\| < \frac{\varepsilon}{\|A_{ij}^{-1}\|} \quad \text{då } r \text{ är tillräckligt litet.}$$

Eftersom $(D\ell)_x$ är kontinuerlig på, (och $\|A_{ij}^{-1}\| \geq d > 0$) $\overline{R}$ (sluten och begränsad) så är $(DR)_x$ likformigt kontinuerlig så vi kan välja samma r för alla ij.

Det följer att

$$\|(D\Psi)_x - \mathrm{Id}\| < \varepsilon .$$

Men enligt hjälpsatsen så innebär det att

$$\Psi(R_{ij}) = \Phi_{ij}^{-1} \circ \varphi(R_{ij}) \subset \underbrace{(1+\varepsilon)\, R_{ij}}$$

kvadraten med sidlängd
$(1+\varepsilon)$ av R_{ij} med
samma centrum

vilket betyder att

$$\varphi(R_{ij}) \subset \phi_{ij}((1+\varepsilon) R_{ij}).$$

På samma sätt

$$\varphi^{-1} \circ \Phi_{ij}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)} R_{ij}\right) \subset R_{ij} \implies \Phi_{ij}\left(\frac{R_{ij}}{(1+\varepsilon)}\right) \subset \varphi(R_{ij}) = W_{ij}$$

Så

$$\Phi_{ij}\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)} R_{ij}\right) \subset W_{ij} \subset \Phi_{ij}((1+\varepsilon) R_{ij}) \qquad 1$$

Men φ_{ij} är affin så volymerna i 1 kan beräknas, om $J_{ij} = \det(A_{ij}) = \det(D\phi_{ij})$ så implicerar 1 att

$$\frac{|J_{ij}|\,|R_{ij}|}{(1+\varepsilon)^2} \leq |W_{ij}| \leq (1+\varepsilon)^2\, |J_{ij}|\,|R_{ij}|$$

Subtrahera $|J_{ij}||R_{ij}|$ från båda led och vi får

$$-\frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{\cancel{(1+\varepsilon)^2}} |J_{ij}||R_{ij}| \leq |W_{ij}| - |J_{ij}||R_{ij}| \leq \frac{2\varepsilon+\varepsilon^2}{\cancel{(1+\varepsilon)^2}} |J_{ij}||R_{ij}|$$

$< 3\varepsilon$ om $\varepsilon < 1$ $\qquad\qquad$ $< 3\varepsilon$

Vi har fortfarande inte använt integrerbarheten. Men om m_{ij} resp M_{ij} är ~~sup~~ resp inf värden av $f\circ\varphi$ på R_{ij} så

$$\sum_{ij} m_{ij} \chi_{W_{ij}^{o}}(w) \leq f(w) \leq \sum_{ij} M_{ij} \chi_{\overline{W_{ij}}}(w)$$

så

$$\sum_{ij} m_{ij} \underbrace{|W_{ij}|}_{|J_{ij}||W_{ij}|-3\varepsilon|J_{ij}||W_{ij}| \leq} \leq \int_{\varphi(R)} f(w)\,dw \leq \sum_{ij} M_{ij} \underbrace{|W_{ij}|}_{\leq |J_{ij}||W_{ij}|+3\varepsilon|J_{ij}||W_{ij}|}$$

Så om $M = \sup|f|$ på $\varphi(R)$ och ~~$J = \sup_{a}|\det(D\varphi)|$~~ $J = \sup|\det(D\varphi)|$ så kommer

$$\underbrace{\sum_{ij} m_{ij} |J_{ij}||W_{ij}| - 3\varepsilon JM|R|}_{\to \int_R f\circ\varphi\, |\det_x(\varphi)|\,dx} \leq \int_{\varphi(R)} f \leq \underbrace{\sum_{ij} M_{ij} |J_{ij}||W_{ij}| + 3\varepsilon JM|R|}_{\to \int_R f\circ\varphi\, |\det_x(\varphi)|\,dx}$$

eftersom $f\circ\varphi\, |\det_x(\varphi)|$ är integrerbar.

Så om vi låter R_{ij} ~~[illegible]~~ förfinas så kommer detta att ge

$$\left| \int_{\varphi(R)} f(x)\,dx - \int_R f\circ\varphi(x)\,|\mathrm{Jac}_x(\varphi)|\,dx \right| < 3\varepsilon \underbrace{MJ|R|}_{\text{konstant}}$$

men $\varepsilon > 0$ är godtyckligt så

$$\int_{\varphi(R)} f(x)\,dx = \int_R f\circ\varphi(x)\,|\mathrm{Jac}_x(\varphi)|\,dx .$$

$\blacksquare$