SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 11

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

23 november 2016

Dagens ämne

Dagens ämne

- Basbyte
- Matriser för samma linjära avbildning i olika baser

På fredag: Halvvägs! Sammanfattning av kursen hittills

Förra gången

Koordinater för en vektor i olika baser:

En mängd av 2 linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{R}^2$ är en bas för $\mathbf{R}^2$.

Låt $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara standardbasen för $\mathbf{R}^2$.

Antag att $\mathcal{F} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ är en annan bas för $\mathbf{R}^2$
med $\vec{f}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$ och $\vec{f}_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}_{\mathcal{E}}$.

Bilda matrisen $P = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$. Detta är basbytesmatrisen från $\mathcal{F}$ till $\mathcal{E}$, dvs:

$$P \left[\vec{v}\right]_{\mathcal{F}} = \left[\vec{v}\right]_{\mathcal{E}}$$

(Med notationen $\left[\vec{v}\right]_{\mathcal{E}}$ menar vi koordinatvektorn för $\vec{v}$ i basen $\mathcal{E}$)

Konkret exempel

Koordinater för en vektor i olika baser, exempel:

Låt $\vec{f_1} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{f_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Då är $\mathcal{F} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}\}$ en bas för $\mathbf{R}^2$.

Låt $\mathcal{E} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ vara standardbasen för $\mathbf{R}^2$.

Bilda matrisen $P = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Då gäller att

$$P\,[\vec{v}]_{\mathcal{F}} = [\vec{v}]_{\mathcal{E}}$$

Till exempel om $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{F}}$ är koordinaterna för en vektor $\vec{v}$ i basen $\mathcal{F}$ så får vi koordinaterna för samma vektor $\vec{v}$ i basen $\mathcal{E}$ genom

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}_{E}$$

Uppgifter:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ är en bas för } \mathbf{R}^3$$

1. Bestäm basbytesmatrisen P för bytet från basen $\mathcal{B}$ till standardbasen $\mathcal{E}$

2. Vad blir koordinaterna i standardbasen $\mathcal{E}$ för den vektor som i basen $\mathcal{B}$ har koordinaterna $\begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$?

Inledande exempel:

Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i projektion på linjen $y = 2x$.

Bestäm matrisen för denna avbildning i basen
$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\}$$

Bestäm matrisen för samma avbildning i standardbasen.

Hur förhåller sig matriserna till varandra?

Matriser och basbyten

Sammanfattning:

Låt $\mathcal{E}$ och $\mathcal{F}$ vara två baser för $\mathbf{R}^n$ och låt P vara den $n \times n$-matris vars kolonner är $\mathcal{F}$-basvektorernas koordinater i basen $\mathcal{E}$. Då gäller:

1. $P\left[\vec{v}\right]_{\mathcal{F}} = \left[\vec{v}\right]_{\mathcal{E}}$
2. $A_{\mathcal{F}} = P^{-1}A_{\mathcal{E}}P$

I den sista formeln betyder $A_{\mathcal{F}}$ och $A_{\mathcal{E}}$ matriserna för samma linjära avbildning från $\mathbf{R}^n$ till $\mathbf{R}^n$ relativt baserna $\mathcal{F}$ respektive $\mathcal{E}$.

Matriser och basbyten

Uppgift:

Låt $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara den linjära avbildning som består i spegling i linjen $y = 2x$.

Bestäm matrisen för denna avbildning i basen
$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \right\}$$

Bestäm matrisen för samma avbildning i standardbasen.

Exempel:

Låt $R : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara den linjära avbildning som består i rotation 180 grader kring linjen med riktningsvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

och betrakta basen $\mathcal{F} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Bestäm matrisen för avbildningen R i basen $\mathcal{F}$

Bestäm matrisen för samma avbildning i standardbasen.

1. Är $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$ en bas för $\mathbf{M}(2,2)$?

2. Avgör om $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ ligger i Span$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$

3. Är $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ en bas för $\mathbf{P}_2$? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen.

4. Är $\mathcal{C} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$ en bas för $\mathbf{P}_2$? Ange i så fall koordinaterna för polynomet $p(x) = 2 - x^2$ i den basen. Hur byter jag koordinater från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{B}$?

5. Bestäm dimensionen av $\mathbf{P}_2$.

6. Låt $p(x) = 1 + x$, $q(x) = 2 + x^2$ och $r(x) = 1 + x + x^2$. Avgör om $\{p, q, r\}$ är linjärt oberoende.