24 november, 2016, Föreläsning 20

Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Projektionssatsen
- Minsta-kvadratmetoden

1. Projektionssatsen - ortogonal projektion på generella underrum

Om W är ett underrum till $\mathbb{R}^n$, då kan varje vektor $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ skrivas (på exakt ett sätt) som $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ där $\vec{x}_1$ ligger i W och $\vec{x}_2$ ligger i $W^\perp$.

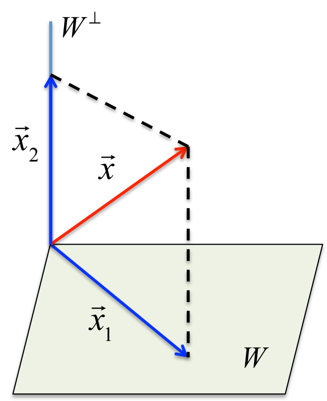
Vektorn $\vec{x}_1 = \text{proj}_W \vec{x}$ och $\vec{x}_2 = \vec{x} - \vec{x}_1 = \text{proj}_{W^\perp} \vec{x}$, se Figur 3.

2. Hur beräknar vi projektionen av $\vec{x}$ på W?

Om W är ett underrum till $\mathbb{R}^n$ och matrisen M är en matris vars kolonnvektorer är en bas för W då är

$$\text{proj}_W \vec{x} = M(M^T M)^{-1} M^T \vec{x}$$

för alla kolonnvektorer $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$.

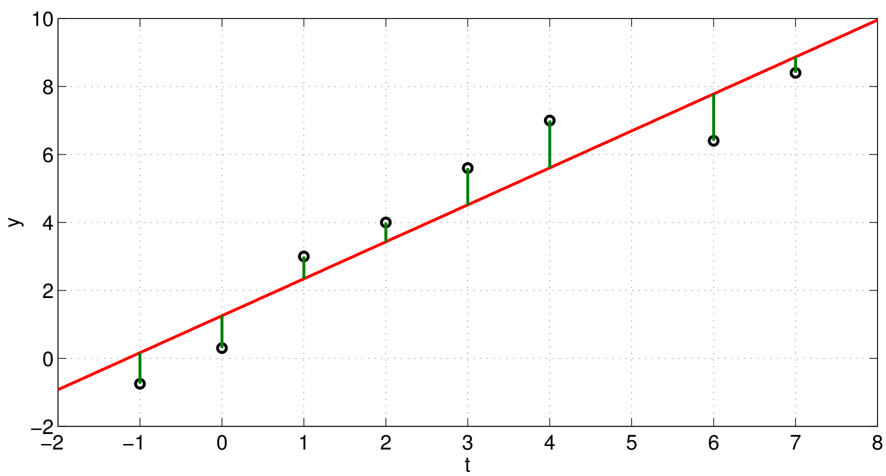


Figur 1. Vektorn $\vec{x}$ i $\mathbb{R}^n$ delas upp i två komponenter med hjälp av ortogonal projektion.

3. Minsta kvadratmetoden - motivation

Inom teknik och vetenskap arbetar man ofta med modellering av data, dvs att koppla ihop mätdata med en formel eller kurva. Anledningen till detta kan vara att man vill studera hur en kvantitet beror av en annan samt kunna dra slutsatser om detta beroende även utanför mätområdet.

Antag att vi har mätt upp ett antal datapunkter $(t_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, n$, och vi vill nu anpassa dessa till en modell som i det här fallet är en rät linje, $y = a + bt$.



Figur 2. Mätdata är markerat som ringar och den anpassade linjen är heldragen. De lodräta sträckorna är skillnaden mellan uppmätta värden och den anpassade räta linjen.

I de flesta fall kan vi inte få den räta linjen att gå genom alla uppmätta punkter, se Figur 1. Hur ska vi välja a och b i vår modell?

Idén med minsta kvadratmetoden är att välja a och b sådana att den räta linjen anpassar sig så bra som möjligt. Vi måste definiera vad vi menar med så bra som möjligt.

4. Matematisk modell

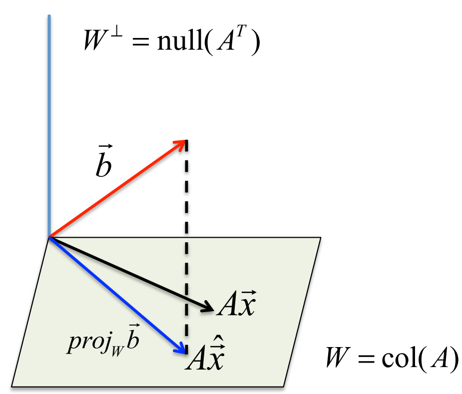
Om vi sätter in våra data i modellen får vi följande överbestämda (fler ekvationer än obekanta) linjära ekvationssystem att lösa för a och b,

$$\begin{array}{ccccc} a & + & bt_1 & = & y_1 \\ a & + & bt_2 & = & y_2 \\ & \vdots & & & \\ a & + & bt_n & = & y_n \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A\vec{x} = \vec{b}$$

Systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har ingen lösning. Hur går vi vidare?

5. Matematisk beskrivning av minsta kvadratmetoden

Problemet med vår ursprungliga modell är att det linjära ekvationssystem för konstanterna a och b saknar lösning. Detta illustreras i Figur 4. Där ser vi att högerledet, $\vec{b}$, i modellen inte ligger i A's kolonnrum, vilket är en förutsättning för att lösning ska finnas. Grundidén i minsta kvadratmetoden är att projicera vektorn $\vec{b}$ ortogonalt på kolonnrummet och sedan lösa systemet $A\vec{x} = \mathrm{proj}_{\mathrm{col}(A)}\vec{b}$. Detta ger oss en lösning $\hat{\vec{x}}$ där avståndet mellan $A\hat{\vec{x}}$ och $\vec{b}$ är det minsta möjliga. (Kortaste avståndet är alltid det vinkelräta.)



Figur 3. Eftersom $\vec{b}$ inte ligger i A's kolonnrum går det inte att hitta en vektor $\vec{x}$ sådan att $A\vec{x} = \vec{b}$. För att lösa problemet projiceras vektorn $\vec{b}$ i $\mathbb{R}^m$ ortogonalt på A's kolonnrum och vi får systemet $A\vec{x} = \mathrm{proj}_{\mathrm{col}(A)}\vec{b}$. Detta kommer att ge oss en minsta kvadratlösning $\hat{\vec{x}}$.

Lösningen, $\hat{\vec{x}}$, är en minsta kvadratlösning till $A\vec{x} = \vec{b}$. Att bestämma minsta kvadratlösningen är detsamma som att lösa den så kallade **normalekvationen**

$$A^T A\vec{x} = A^T\vec{b}.$$

Om A har full rang, har normalekvationen en **unik** lösning,

$$\hat{\vec{x}} = (A^T A)^{-1} A^T \vec{b}.$$

Notera att vi inte explicit behöver bestämma projektionen av $\vec{b}$ på $\text{col}(A)$ för att bestämma $\hat{\vec{x}}$.

6. Hur stort blir felet i approximationen av $\vec{b}$?

När vi använder den ortogonala projektionen av $\vec{b}$ på $\text{col}(A)$ så kommer avståndet $\|\vec{b} - A\hat{\vec{x}}\|$ vara det minsta möjliga. Om vi låter $a = \hat{x}_1$ och $b = \hat{x}_2$ där $\hat{x}_1$ och $\hat{x}_2$ är elementen i $\hat{\vec{x}}$ så får vi minsta kvadratfelet (kallas även minsta kvadratsumman)

$$\|\vec{b} - A\hat{\vec{x}}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bt_i))^2}.$$

Här ser vi att vi har minimerat summan av kvadraterna på avvikelserna. Avvikelserna är de lodräta gröna sträckorna i Figur 1.

7. Andra modeller än en rät linje

Man kan även anpassa data till andra modeller än en rät linje.

Antag att vi har en uppsättning data enligt tabellen.

x	x_1	x_2	x_3	x_4
y	y_1	y_2	y_3	y_4

Modell på anpassningen väljs beroende på hur data ser ut (i exempelvis en plot). Vanliga modeller är (fler modeller finns på s 405 i Anton).

Polynom av gradtal $n > 1$. Exempel: Bestäm c_1, c_2 och c_3 sådana att $y = c_1x^2+c_2x+c_3$ i minsta kvadratmetodens mening. Detta leder till det överbestämda systemet, $A\vec{c} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Trigonometriska funktioner, $\cos(x), \sin(x)$. Exempel: Bestäm c_1, c_2 och c_3 sådana att $y = c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x)$. Detta leder till det överbestämda systemet, $A\vec{c} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(x_1) & \sin(x_1) \\ 1 & \cos(x_2) & \sin(x_2) \\ 1 & \cos(x_3) & \sin(x_3) \\ 1 & \cos(x_4) & \sin(x_4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

8. **Uppgift.** Visa att felvektorn $\vec{b} - A\hat{\vec{x}}$ är ortogonal mot $\text{col}(A)$ om $\hat{\vec{x}}$ är en minsta-kvadratlösning till $A\vec{x} = \vec{b}$.

9. **Uppgift.** Följande data är uppmätt

t	0	1	2	3
y	1.0	3.0	4.0	4.0

Anpassa data till den räta linjen $y = a + bt$.

Svar: $y = 1.5 + t$

10. **Uppgift.** (Tenta 12/6-12, Tal 6, B-delen)

Efter mätningar leds en student till att bestämma ekvationen $y = ax^2 + bx + c$ för den parabel som i minsta kvadratmening bäst anpassar till punkterna $(-2, 5), (-1, 7), (0, 6), (1, 4)$ och $(2, 3)$. Efter räkningar kommer studenten fram till ekvationssystemet med totalmatris

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 34 & 0 & 10 & 43 \\ 0 & 10 & 0 & -7 \\ 10 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right].$$

a) Förklara hur man kommer fram till detta ekvationssystem.

b) Kontrollera att $a = -0.5$, $b = -0.7$ och $c = 6$ är en lösning och förklara vilken slutsats vi kan dra för det ursprungliga problemet.

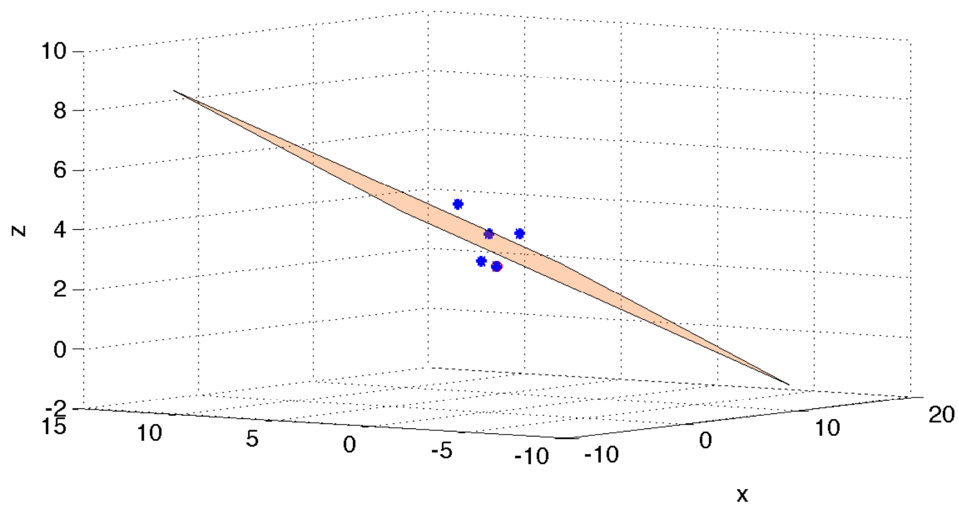
11. **Uppgift.** (Tenta 29/8-13, Tal 4, B-delen) del B)

Använd minsta-kvadratmetoden för att bestämma en ekvation för det plan H som ligger närmast punkterna

$$(-1, -1, 3), \quad (-1, 1, 5), \quad (0, 0, 4), \quad (1, -1, 4), \quad \text{och } (1, 1, 3).$$

Se figuren nedan.

Du kan anta att ekvationen för planet är på formen $ax + by + z + d = 0$.



10
8
6
4
2
0
-2
z
15
10
5
0
-5
-10
-10
0
10
20
x