KTH ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

# EL1010 Reglerteknik AK

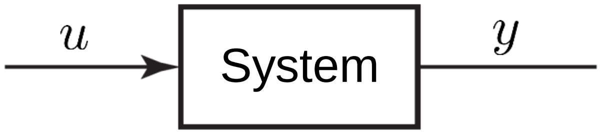
Föreläsning 4:
Frekvensbeskrivning och Bodediagram

# Dagens program

- Systembeskrivningar (repetition, slides)
- Rotort och Nyquistkriteriet (repetition, slides)
- Frekvensbeskrivning (tavlan)
- Skissa Bodediagram (tavlan)

# Systembeskrivningar

- System i blockschemaform




- System i differentialekvationsform

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0\dot{u}(t) + b_1 u(t)$$

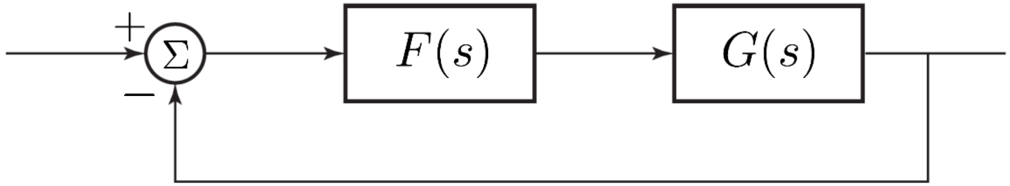
- System i överföringsfunktionform

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{G(s)} U(s)$$

- **Idag:** System i *frekvensbeskrivningsform*

# Att analysera slutna systemets stabilitet

- Slutet (återkopplat) system (process $G(s)$ och regulator $F(s)$) :




- **Förra veckan:** Två metoder för att avgöra slutna systemets stabilitet m.a.p. på en variabel parameter $k$
- Parametern $k$ kan vara t.ex. en reglerparameter $(K_P, K_I, K_D)$ eller en systemparameter (t.ex. massa $m$, friktion $b$)
- Låt kretsförstärkningen (öppna systemet) vara

$$G_o(s) = G(s)F(s) = k\frac{Q(s)}{P(s)}$$

# Rotort

- Slutna systemet $G_c(s) = \frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)} = \frac{kQ(s)}{P(s) + kQ(s)}$

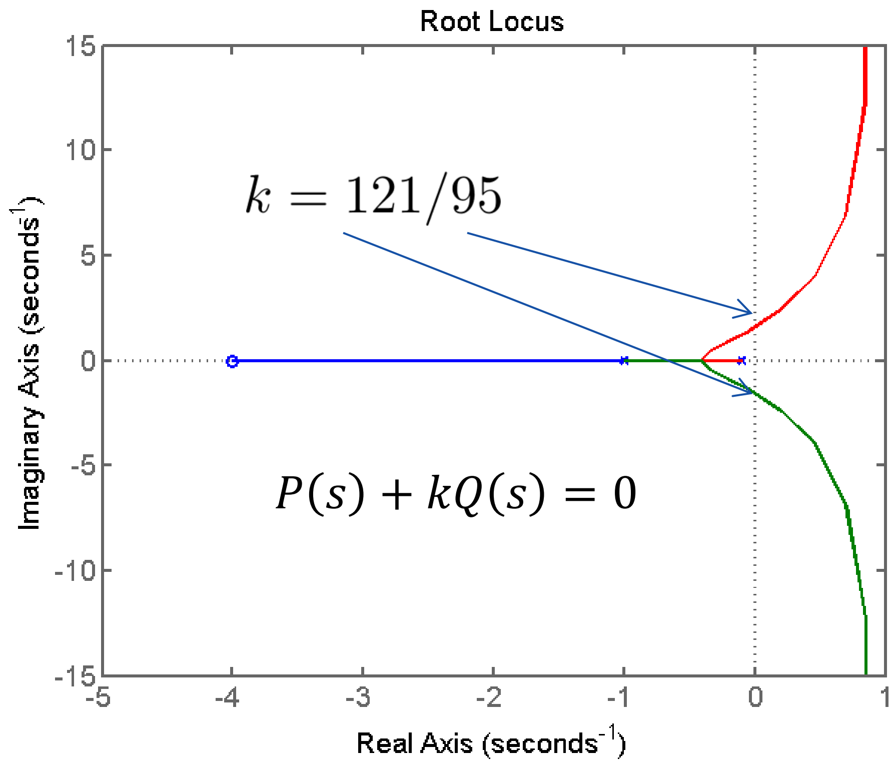
- Plotta *slutna* systemets poler m.a.p. $k$ (Skissa i fyra steg)

- Exempel: PD-fartreglering (Fö. 3)

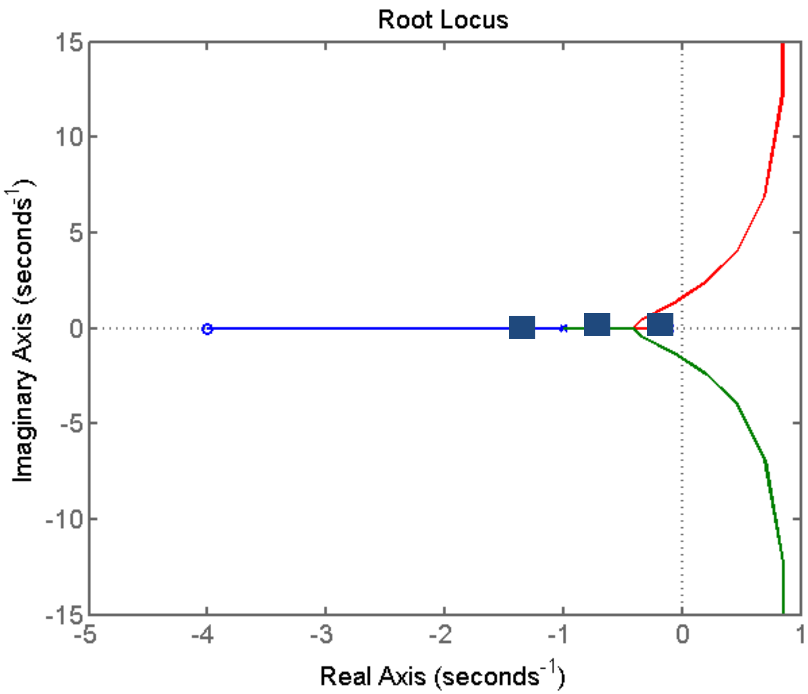
$$G_o(s) = k\frac{s+4}{(s+1)^2(s+0.1)}$$

- $G_c(s)$ asymptotiskt stabilt om $k < 121/95$ (Steg IV)

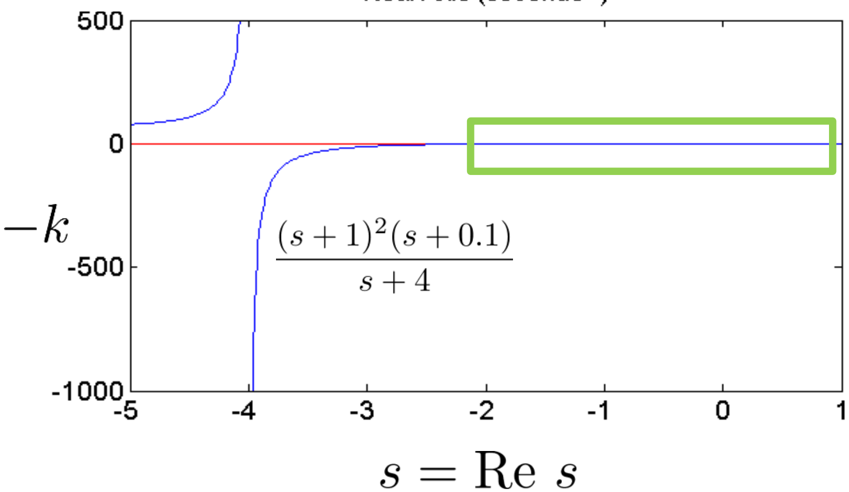
- Kräver *polynomen* $P(s), Q(s)$

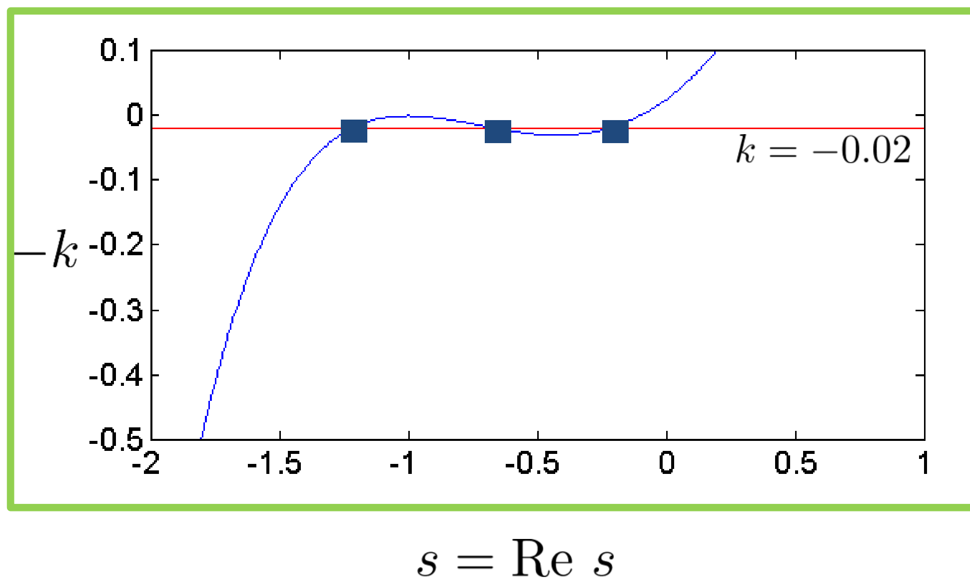


# Rotort – Steg III: Del av reella axeln




$$\frac{(s+1)^2(s+0.1)}{s+4} = -k \le 0 \quad (**)$$

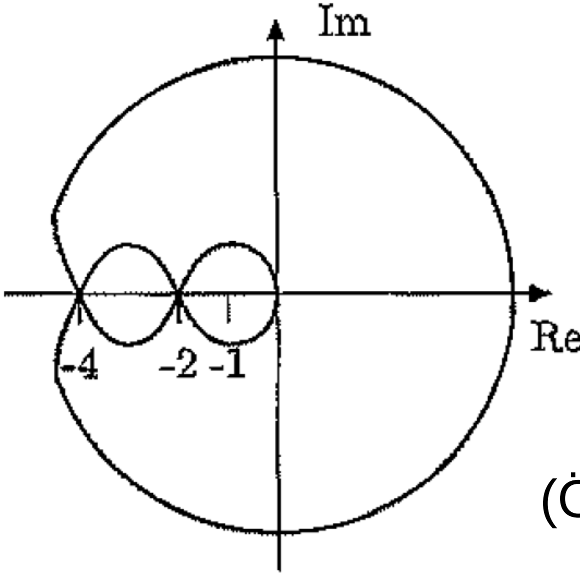


# Nyquistkriteriet (Förenklat)

- Antag *öppna systemet* $G_o(s)$ inte har poler i högra komplexa halvplanet (ej instabilt öppet system)
- Rita kurvan $G_o(i\omega), -\infty \leq \omega < \infty$ (”*Nyquistdiagram”*) i komplexa talplanet $\leftarrow$
- *Slutna systemet* $G_c(s)$ asymptotiskt stabilt om punkten -1 ej omringas av kurvan

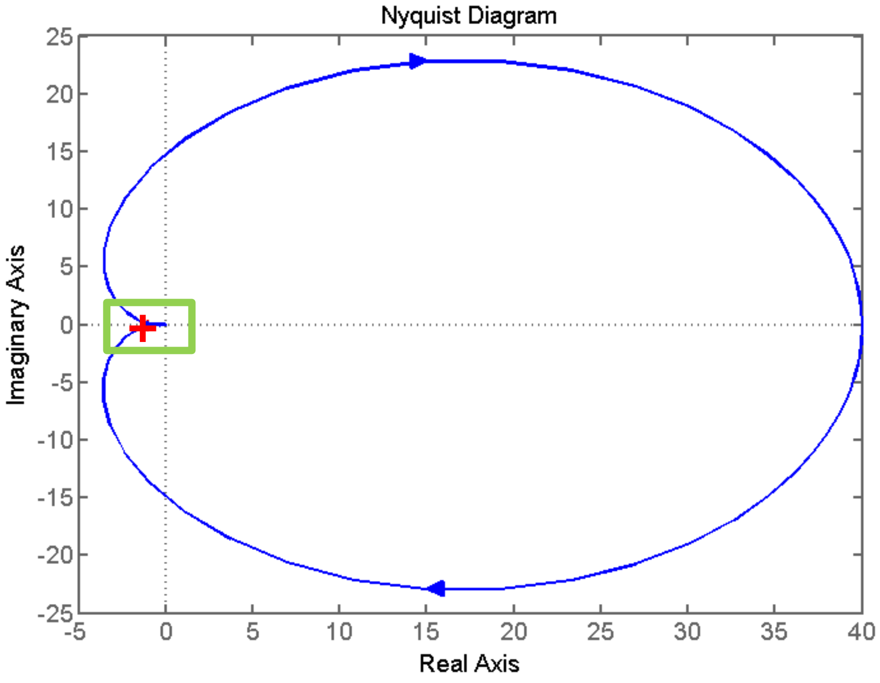
Kurvan ritas med dator alt. mäts upp eller skissas utifrån Bodediagram (idag)

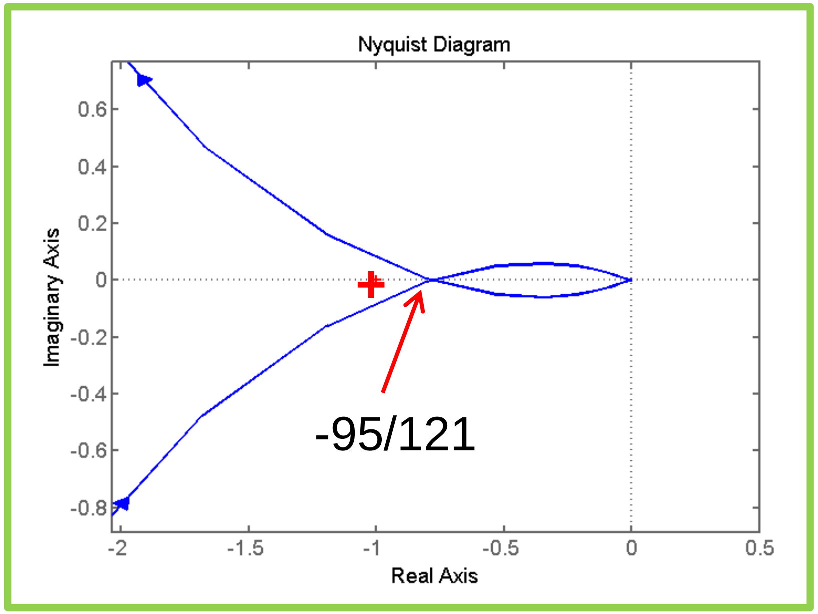



(Övning 3.15)

# Nyquistkriteriet (PD-fartreglering, Fö. 3)

- Öppet system $G_o(s) = k\dfrac{s+4}{(s+1)^2(s+0.1)}$ (rita Nyquist för $k$=*1*) har 0 instabila poler
- $G_c(s)$ stabilt om $k < \dfrac{1}{\frac{95}{121}} \approx 1.27$

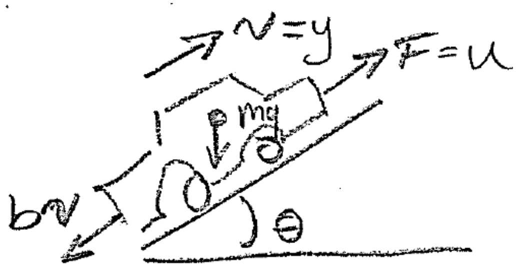


# Dagens program

- Systembeskrivningar (repetition, slides)
- Rotort och Nyquistkriteriet (repetition, slides)
- **Frekvensbeskrivning (tavlan)**
- **Skissa Bodediagram (tavlan)**

# Modell av bil
$(m = 1,\ b = 0.5,\ \theta = 0)$




1. Från kraftlagen ($u = F, y = v$)

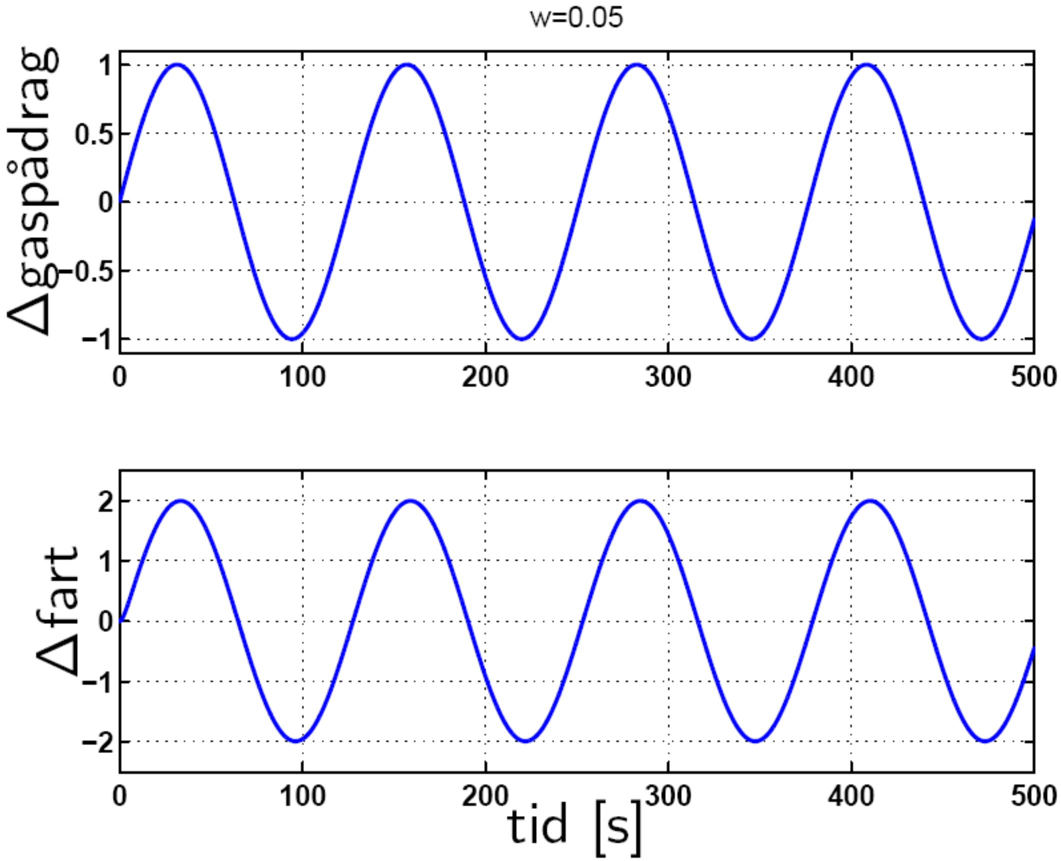
$$\dot{y}(t) = -0.5y(t) + u(t)$$

2. Laplacetransformation ger

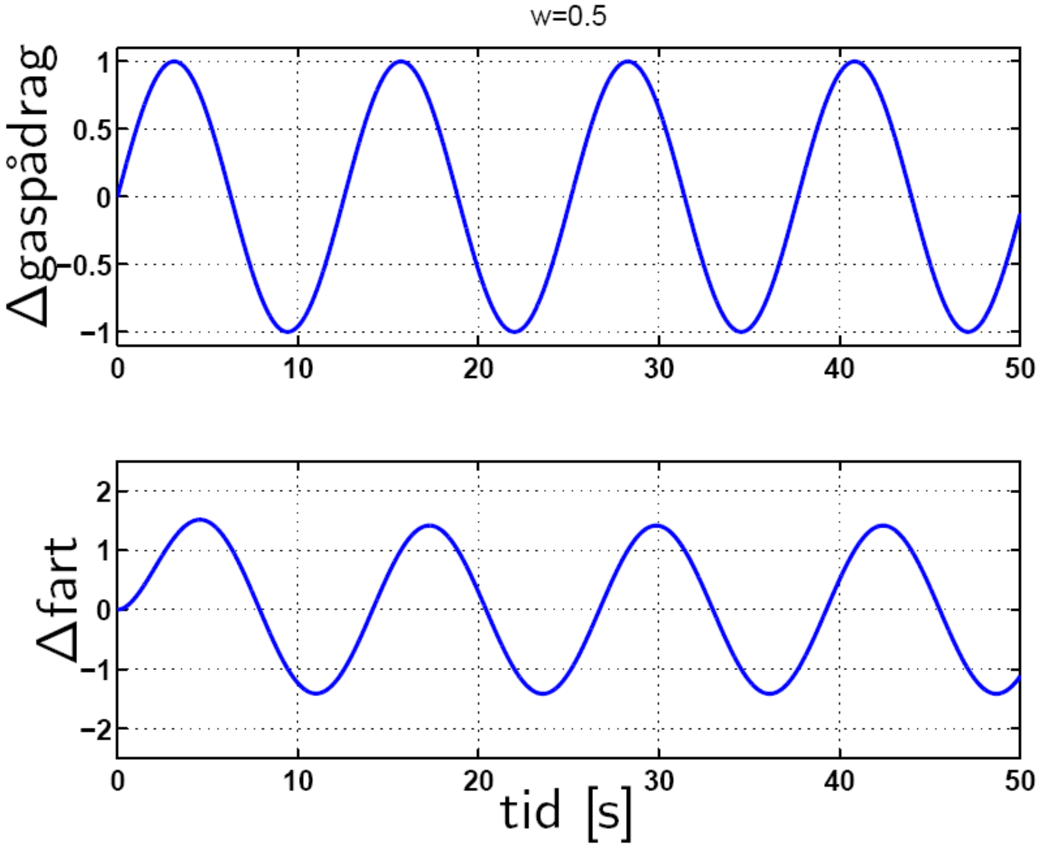
$$Y(s) = \frac{2}{2s+1}U(s)$$

3. Låt $u(t) = \sin(\omega t)$, bestäm $y(t)$ som funktion av frekvens $\omega$

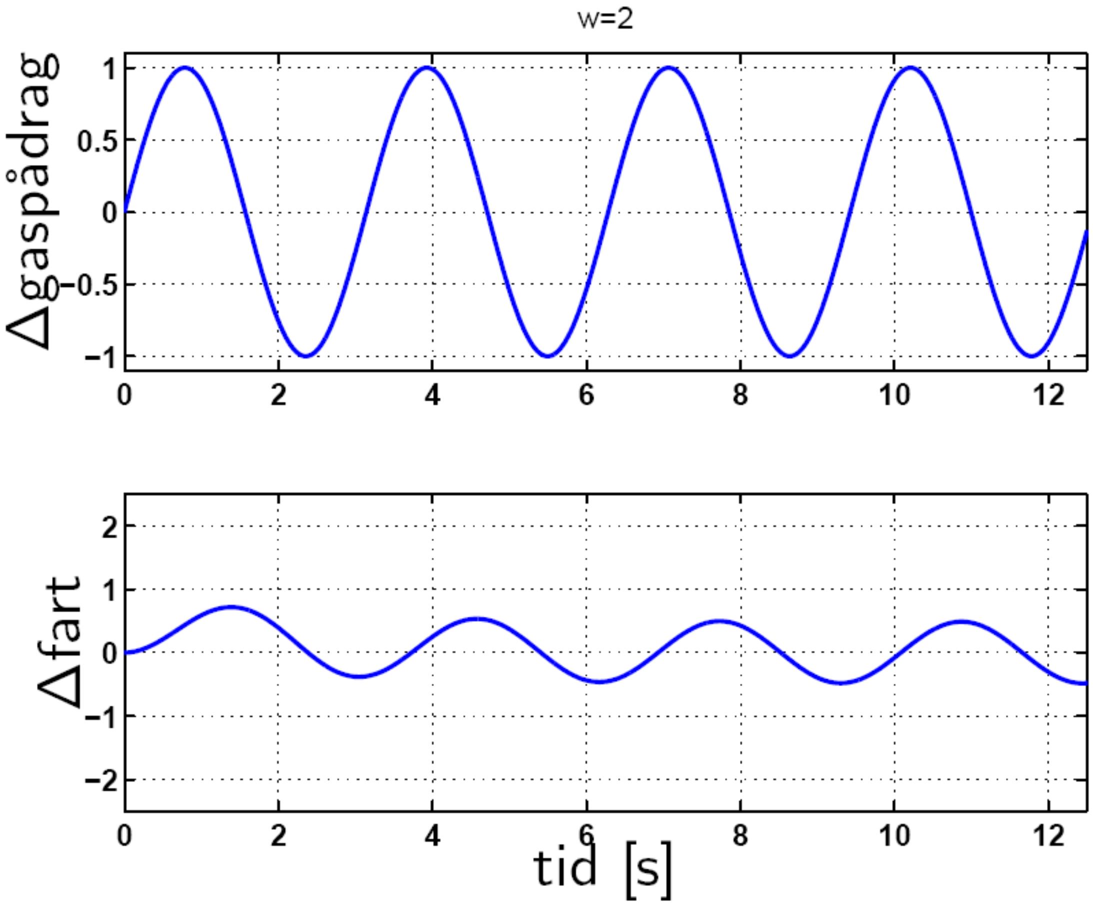
# Simulering av bil, $\omega = 0.05$ rad/s



# Simulering av bil, $\omega = 0.5$ rad/s

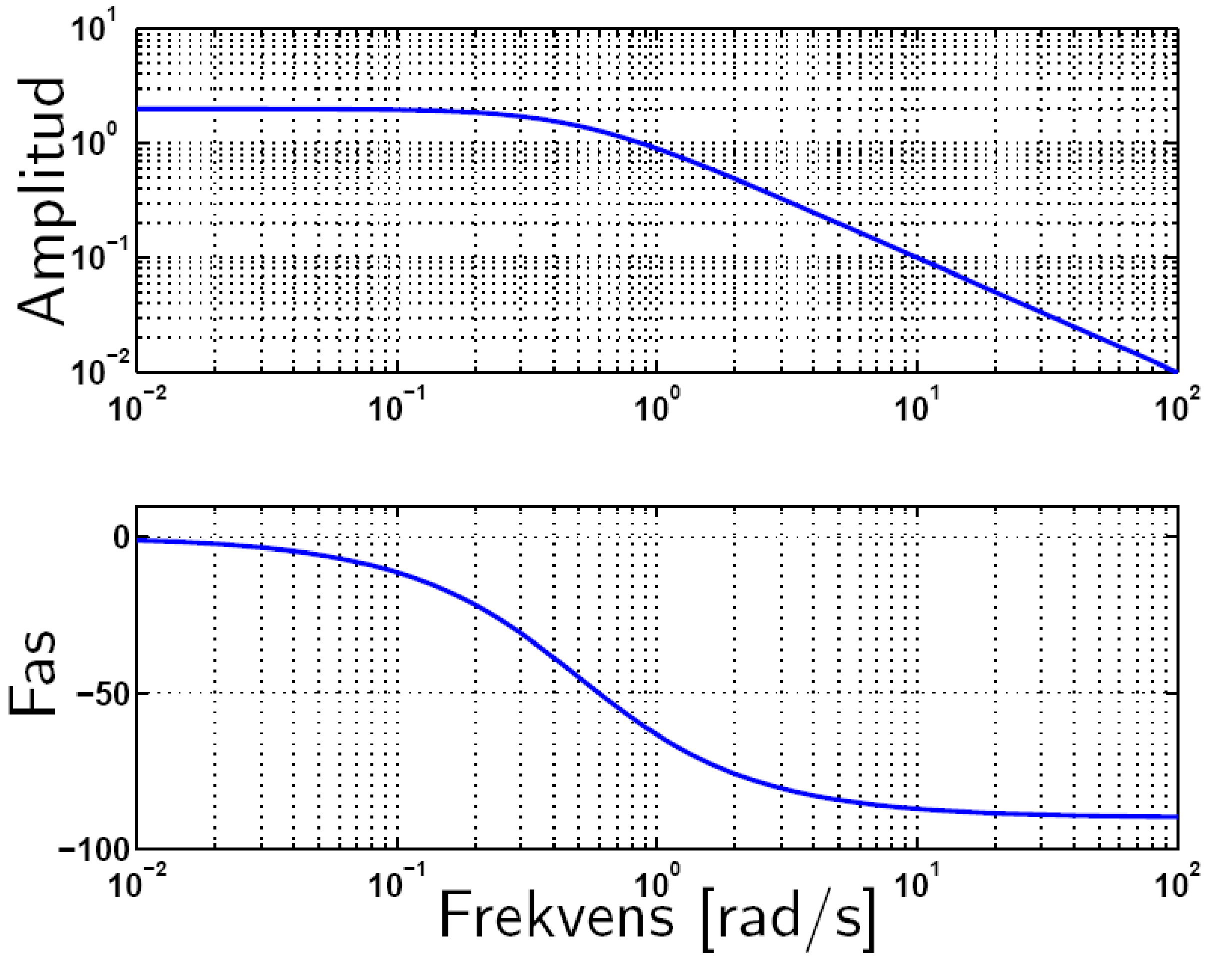


# Simulering av bil, $\omega = 2.0$ rad/s



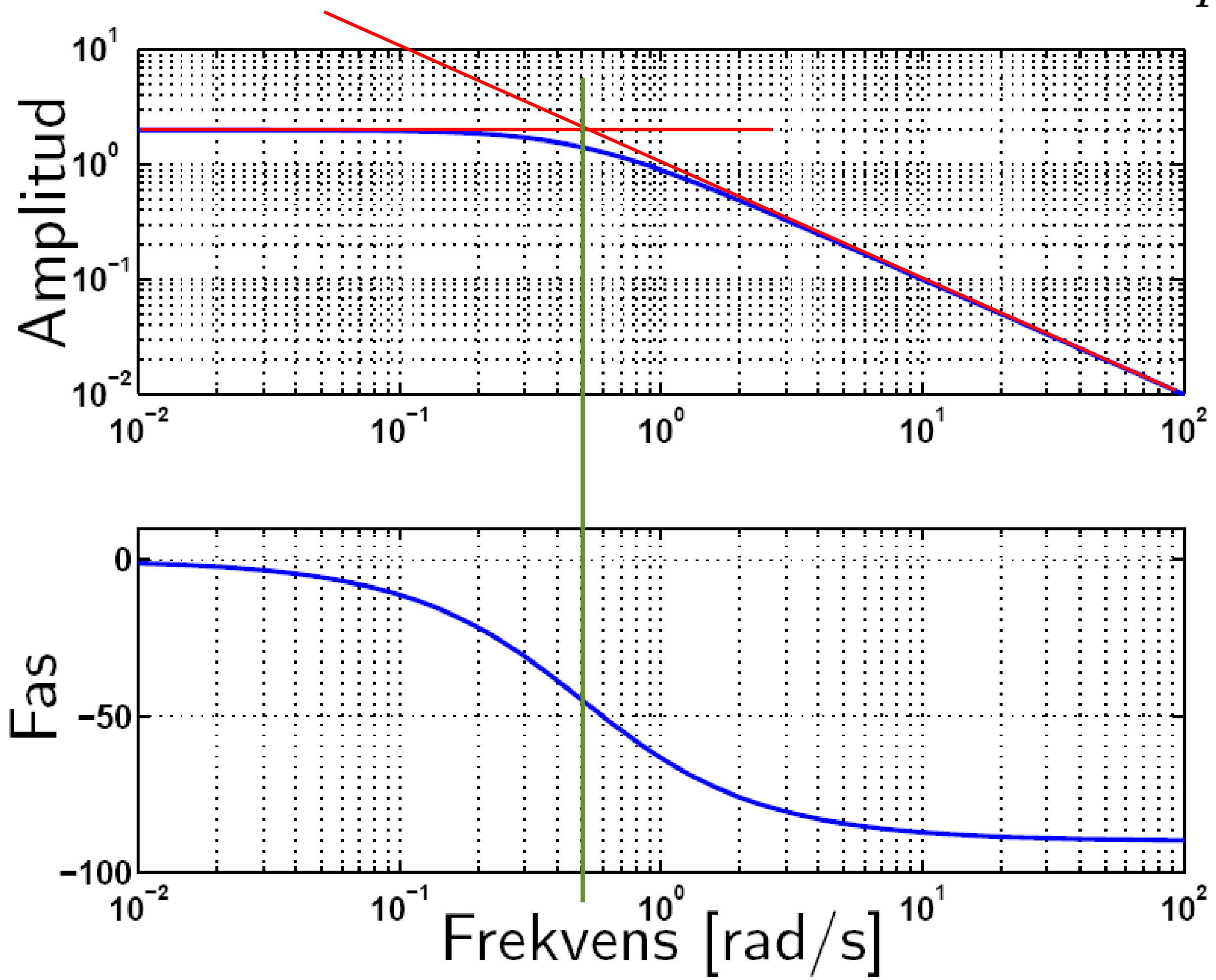
# Bodediagram av bil

$$G(s) = \frac{2}{2s+1}$$



# Bodediagram av bil (brytpunkt)

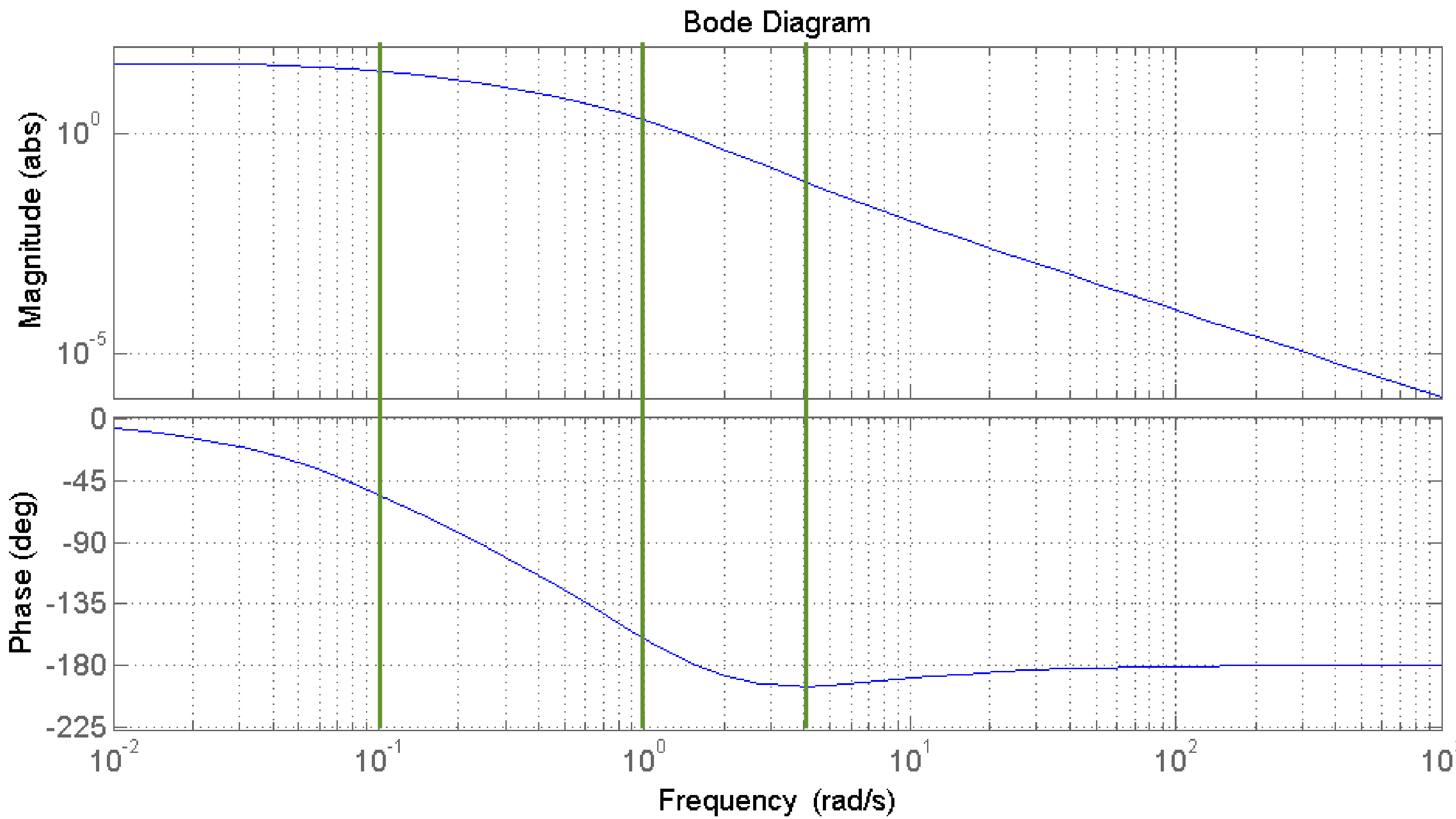
$$\omega_{bp} = ?$$



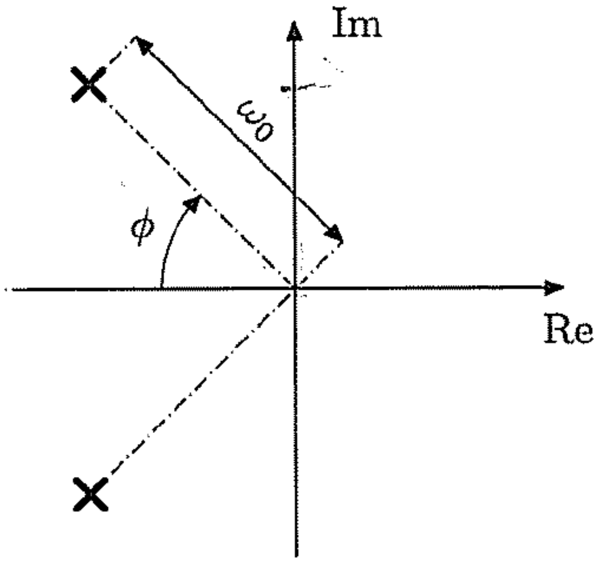
# Bodediagram Ex. 3
# PD-Fartreglering

$$G(s) = \frac{s+4}{(s+1)^2(s+0.1)}$$

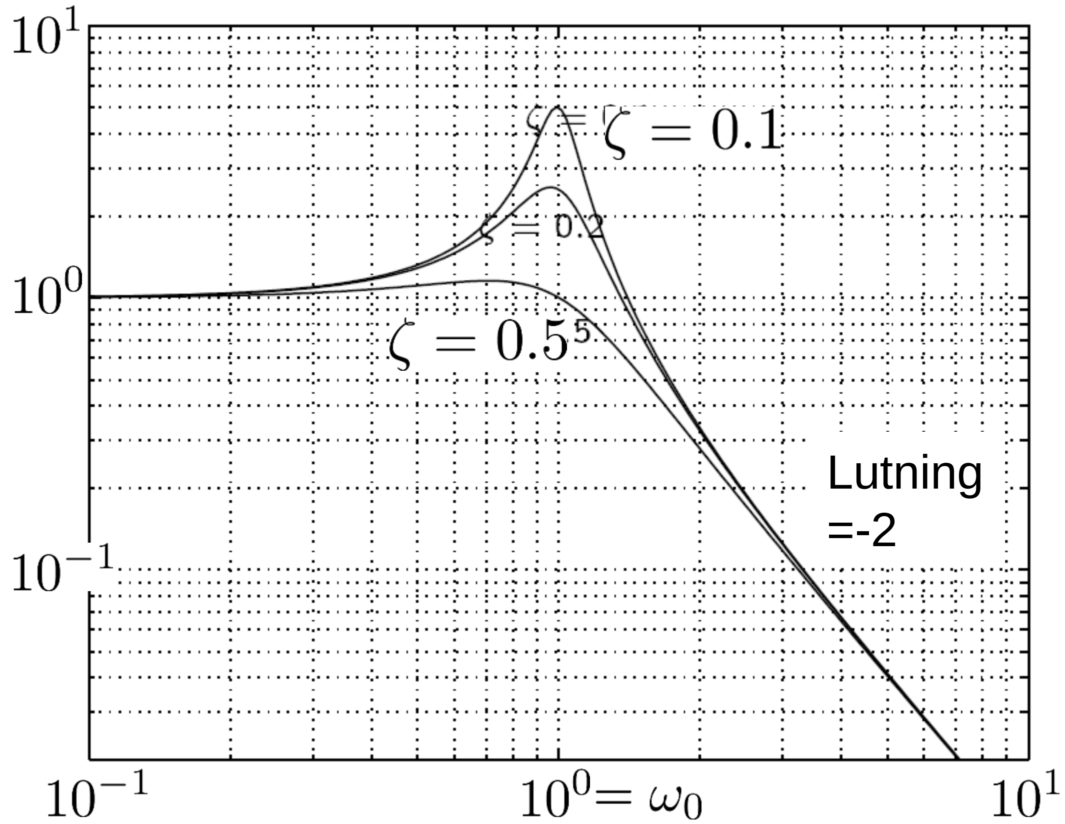
- Matlab: `s=tf('s'),`
  `bode((s+4)/(s+1)^2/(s+0.1)), grid on`



# Bodediagram – Komplexa poler (amplitud)




$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (\omega_0 = 1)$$




Relativ dämpning: $\cos\phi = \zeta$

Brytpunkt: $\omega_0$

$G(i\omega_0) = \frac{1}{2\zeta} \approx$ resonanstopp

# Frekvenssvar från gående robotar

https://www.youtube.com/watch?v=tf7IEVTDjng [Boston Dynamics, 2016]

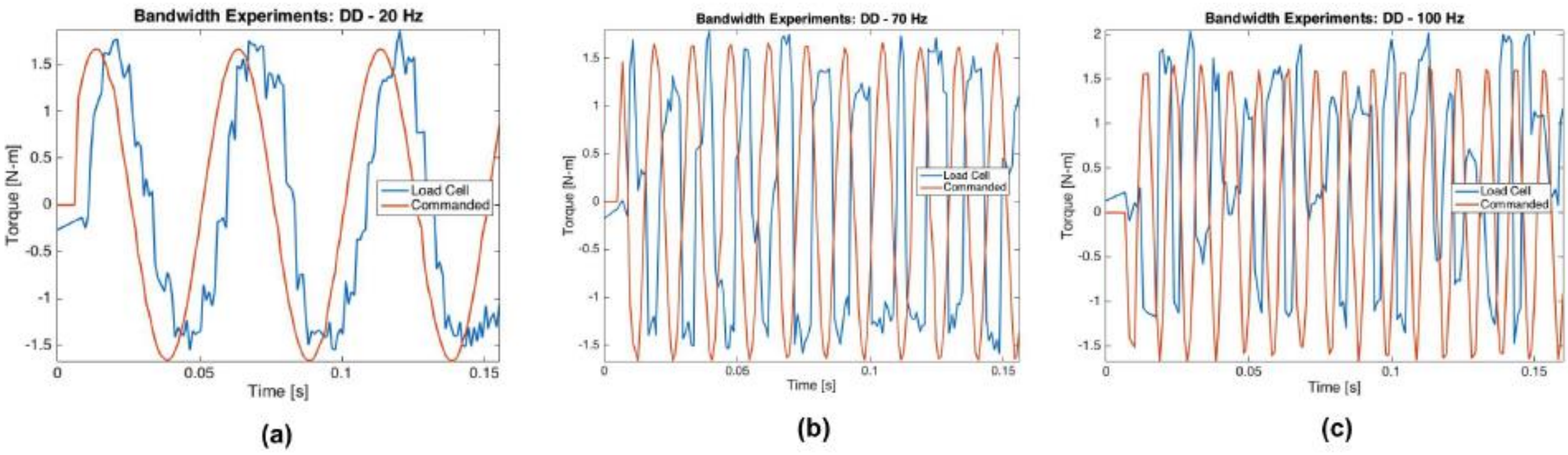



Figure 2.12: Experimental torque bandwidth testing for a direct-drive T-motor commanded sinusoidal torque trajectories at 20, 70 and 100 Hz.

[S. Kalouche, PhD thesis, 2016]

# Stegsvar från gående robotar

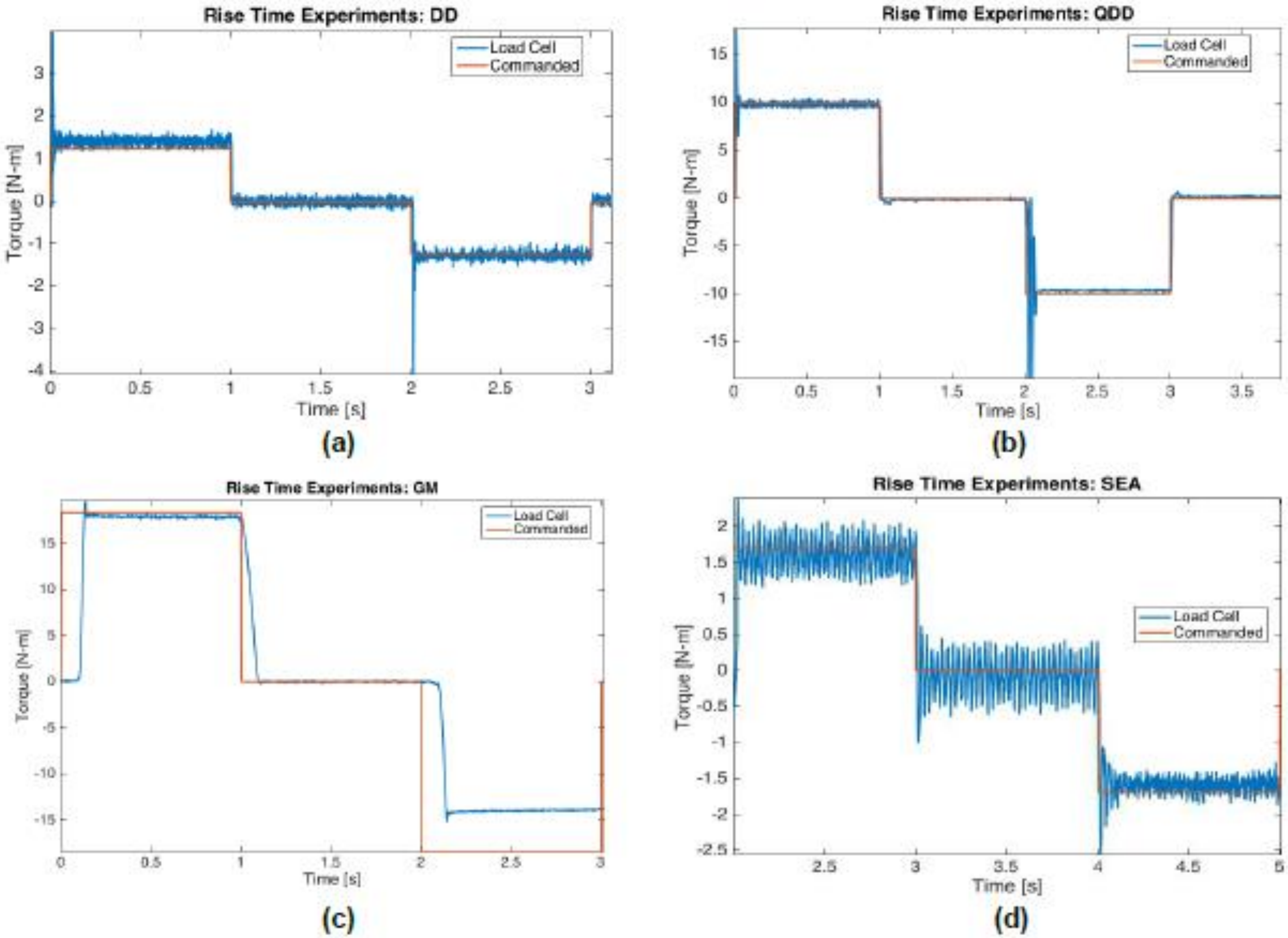



Figure 2.16: (a) DD, (b) QDD, (c) GM, (d) SEA. Rise time, settling time, peak time, overshoot, and proprioceptive torque sensing accuracy and error are calculated using the following step response experiments shown here.

[S. Kalouche, PhD thesis, 2016]

# Quiz

(1) Ett system har överföringsfunktionen $G(s) = \frac{1}{s}$ och insignalen är $u(t) = \sin 2t$. Vad blir utsignalen $y(t)$ stationärt?

a) $\frac{1}{2} \sin 2t$

b) $\frac{1}{4} \sin \left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

c) $\frac{1}{2} \sin \left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$

d) $\sin \left(t + \frac{\pi}{2}\right)$

---

(2) Ett system har överföringsfunktionen $G(s) = s^2 + 1$. vid vilka frekvenser är förstärkningen som högst?

a) Låga frekvenser

b) Höga frekvenser

c) Frekvenser nära $\omega_0$

d) Frekvenser nära bandbredden

# Quiz

(3) Vilka frekvenser förstärks mest vid I-reglering?

a) Låga frekvenser
b) Höga frekvenser
c) Frekvenser nära $\omega_0$
d) Frekvenser nära bandbredden

(4) Ger en derivator upphov till en positiv eller en negativ fasförskjutning?

a) Positiv
b) Negativ
c) Beror på koefficienten framför
d) Omöjligt att dra slutsatser