17 november, 2016, Föreläsning 18

SF1675, Tillämpad linjär algebra

Innehåll:

- Koordinater i olika baser
- Basbyten

Koordinater i olika baser

1. **Definition.** Låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ vara en bas för ett delrum W i $\mathbb{R}^n$. Då kan varje vektor $\vec{w}$ i W skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k.$$

Koefficienterna, $c_1, c_2, \dots, c_k$ kallas för koordinater med avseende på basen $\mathcal{B}$. För att beteckna vektorn $\vec{w}$'s koordinater i basen $\mathcal{B}$ skriver man

$$[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

$[\vec{w}]_{\mathcal{B}}$ kallas för koordinatvektor (eller koordinatmatris - i Anton).

Notera att koordinaterna för $\vec{w}$ i basen $\mathcal{B}$ uppfyller följande likhet

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_k][\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{w}$$

2**. Standardbas**

Vektorerna $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas till $\mathbb{R}^3$. Den kallas för standardbas. I standardbasen har vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ koordinaterna $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. **Uppgift.** $V = \text{Span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ där $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^3$. Låt $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara en bas för V.

Bestäm vektorn $\vec{v}$'s koordinater i basen $\mathcal{B}$ om $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$. **Svar:** $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$

4. **Uppgift.** $V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Visa att $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ är en bas för V.

b) Låt $\vec{v}$ vara en vektor i V som i basen $\mathcal{B}$ har koordinaterna $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm $\vec{v}$.

c) Undersök om vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ligger i V. I sådant fall, bestäm koordinaterna av $\vec{w}$ i basen $\mathcal{B}$.

Svar: b) $\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$ c) Ja $\vec{w}$ ligger i V. $[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Basbyten och basbytesmatriser

5. **Proposition.** Låt $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Följande påståenden är ekvivalenta

(1) $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ är en bas till $\mathbb{R}^n$.
(2) $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ är linjärt oberoende.
(3) $\text{span}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$.
(4) En matris med basvektorerna som kolonner, $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ är inverterbar.

6. Låt $\vec{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Antag att vi byter från en bas $\mathcal{B}_1$ till en annan bas $\mathcal{B}_2$. Hur ser relationen ut mellan koordinaterna för $\vec{v}$ i $\mathcal{B}_1$, $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$ och koordinaterna för $\vec{v}$ i $\mathcal{B}_2$, $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$ ut?

Låt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. För att hitta koordinaterna för $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}_1$ måste vi lösa systemet

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = \vec{v}.$$

Dvs koordinaterna för $\vec{v}$ i basen $\mathcal{B}_1$ ges av

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]^{-1}\vec{v}. \tag{1}$$

Låt $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_n\}$. För att hitta koordinaterna för $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}_2$ måste vi lösa systemet

$$[\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = \vec{v}.$$

Dvs koordinaterna för $\vec{v}$ i basen $\mathcal{B}_2$ ges av

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = [\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n]^{-1}\vec{v}. \tag{2}$$

Från sambanden (1) och (2) ovan kan vi hitta en relation mellan $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$ och $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = [\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n]^{-1}\vec{v} = [\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n]^{-1}[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$$

Matrisen $[\vec{w}_1\ \vec{w}_2\ \cdots\ \vec{w}_n]^{-1}[\vec{v}_1\ \vec{v}_2\ \cdots\ \vec{v}_n]$ kallas för basbytesmatris (övergångsmatris) från $\mathcal{B}_1$ till $\mathcal{B}_2$ och betecknas med $P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$. Dvs

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}.$$

7. **Proposition (se teorem 7.11.3 i Anton)**.

Basbytesmatrisen ges av

$$P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \left[[\vec{v}_1]_{\mathcal{B}_2}\,[\vec{v}_2]_{\mathcal{B}_2}\cdots[\vec{v}_n]_{\mathcal{B}_2}\right].$$

där kolonnerna i matrisen är koordinaterna för basen $\mathcal{B}_1$ med avseende på basen $\mathcal{B}_2$.

8. **Uppgift.**

a) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

b) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

c) Antag att $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$.

d) Antag att $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_1}$.

Svar: c) $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ d) $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} -2.5 \\ 4.5 \\ 1.5 \end{bmatrix}$

9. Om U är ett delrum i $\mathbb{R}^n$ och $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ är två baser till U. Då är basbytesmatrisen från $\mathcal{B}_1$ till $\mathcal{B}_2$ en $k \times k$ matris $P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ sådan att för alla vektorer $\vec{u}$ i U gäller

$$P_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}[\vec{u}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{u}]_{\mathcal{B}_2}$$

10. **Uppgift.** (Tenta 4/6-13, B-delen)

Vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bildar en bas $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ för delrummet W i $\mathbb{R}^4$. Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

är övergångsmatrisen (basbytesmatrisen) som omvandlar koordinater med avseende på basen $\mathcal{B}_1$ till koordinater med avseende på basen $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Bestäm vektorerna $\vec{v}_1$ och $\vec{v}_2$.

11. **Uppgift.** (Tenta 13/12-12, B-delen)

Låt $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ vara en bas för ett delrum V i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara två vektorer i $\mathbb{R}^n$ som uppfyller relationerna

$$\vec{u} + \vec{e} = \vec{v} \qquad \vec{f} + 2\vec{u} = -3\vec{v}$$

a) Bestäm koordinatvektorn till $\vec{v}$ med avseende på basen $\mathcal{B}$.

b) Visa att vektorerna $\vec{u}$ och $\vec{v}$ också utgör en bas för V.