SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 5

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

9 november 2016

Feedback

Innan vi börjar: En liten feedback-övning

- Vad menas med rangen av en matris?
- Vad menas med ett homogent linjärt ekvationssystem?
- Kan du ge ett exempel på ett homogent linjärt ekvationssystem som är inkonsistent?

Svara på frågorna. 2 min individuella tankar och 3 minuter diskussion två och två.

De svåra sakerna

Dagens ämnen:

- Vektorrum
- Delrum
- Linjärkombinationer och linjära höljen (span)
- Linjärt oberoende
- Baser för delrum
- Dimension

Kapitel 1.2 och 2.3 i boken.

Vektorrumsaxiomen

Följande regler gäller för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ och $s, t \in \mathbf{R}$

1. $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{R}^n$
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
3. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
4. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
5. $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
6. $t\vec{x} \in \mathbf{R}^n$
7. $s(t\vec{x}) = (st)\vec{x}$
8. $(s + t)\vec{x} = s\vec{x} + t\vec{x}$
9. $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$
10. $1\vec{x} = \vec{x}$

Se sats 1 sid 15 i boken.

Det finns andra vektorrum än $\mathbf{R}^n$:

- Mängden av kontinuerliga funktioner på $[0, 1]$
- Mängden av polynom
- Mängden av 2x2-matriser
- Och många många fler!

Delrum

I den här kursen kommer vi nästan bara syssla med vektorrummen $\mathbf{R}^n$ och deras delrum.

Definition. En icke-tom delmängd S av $\mathbf{R}^n$ sägs vara ett **delrum** till $\mathbf{R}^n$ om för alla vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in S$ och skalärer $t \in \mathbf{R}$ gäller

1. $\vec{x} + \vec{y} \in S$
2. $t\vec{x} \in S$

Specialfall. $\{\vec{0}\}$ är ett delrum, kallat det triviala delrummet. $\mathbf{R}^n$ är ett delrum till $\mathbf{R}^n$.

Exempel.

1. Visa att $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 + x_2 = 0 \right\}$ är ett delrum till $\mathbf{R}^2$.

2. Visa att $S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1 + x_2 = 1 \right\}$ INTE är ett delrum till $\mathbf{R}^2$.

Span

En given mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ **spänner upp** ett delrum S till $\mathbf{R}^n$ genom

$$S = \{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k : t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}\}$$

Dvs S är alla tänkbara **linjärkombinationer** av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

Vi skriver $S = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$.

Ett svenskt ord för span är **linjärt hölje**.

Exempel.

1. Beskriv geometriskt det delrum S till $\mathbf{R}^2$ som ges av

$$S = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}\right\}$$

2. Avgör om vektorn $\begin{bmatrix}-5\\4\\7\end{bmatrix}$ ligger i delrummet

$$S = \text{Span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Linjärt beroende/oberoende

En given mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ sägs vara linjärt oberoende om ingen av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Ett annat sätt att säga samma sak:

Definition. En mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ sägs vara **linjärt oberoende** om ekvationen

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

bara har den triviala lösningen $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Finns det någon icke-trivial lösning till ekvationen sägs mängden vektorer istället vara **linjärt beroende.**

Bas för delrum

Definition. Om en mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ **spänner upp** ett delrum S till $\mathbf{R}^n$ och dessutom är **linjärt oberoende** så sägs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ vara en **bas** för S.

Obs standardbasen för $\mathbf{R}^n$ är $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$

Uppgift/Exempel.

Avgör om mängden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$ är linjärt oberoende.

Bestäm en bas för $S = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$

Dagens tentaproblem.

Planet H_1 ges av ekvationen $3x + 2y + 2z = 0$ och planet H_2 ges av $x + 2y - 2z = 0$. Linjen L är skärningen av H_1 och H_2.

(a) Bestäm en bas för skärningslinjen L

(b) Avgör om linjen L ligger i delrummet $V = \text{Span}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$, där

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Homogena system

Definition: Ett linjärt ekvationssystem sägs vara homogent om högerledet bara består av nollor.

Observation: Homogena linjära ekvationssystem har alltid den triviala lösningen $\vec{0}$. Så de är alltid konsistenta.

Observation: Homogena linjära ekvationssystem med fler obekanta än ekvationer har alltid icke-trivial lösning.

Teori / observationer

1. Faktum. Om ett icke-trivialt delrum S har en bas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ så gäller att

(a) ingen uppsättning av k vektorer i S, där $k > n$, kan vara linjärt oberoende

(b) ingen uppsättning av k vektorer i S, där $k < n$, kan spänna upp S

2. Faktum. Låt S vara ett icke-trivialt delrum till $\mathbf{R}^n$. Då har alla baser för S samma antal element.

3. Faktum. Vilken som helst mängd av n linjärt oberoende vektorer i $\mathbf{R}^n$ är en bas för $\mathbf{R}^n$.

4. Definition. Dimensionen av ett icke-trivialt delrum S till $\mathbf{R}^n$ är antalet vektorer i en bas. Det triviala delrummet $\vec{0}$ sägs ha dimension 0.