SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 5

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

9 november 2016

Dagens ämnen:

- Reducerad trappstegsform
- Gauss-Jordans fullständiga metod
- Rang
- Homogena system

Kapitel 2.2 i boken.

Exempel

Exempel 1: Lös med Gauss-Jordans metod ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Exempel 2: Lös med Gauss-Jordans metod ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$$

Terminologi

Ord:

- radreduktion — göra radoperationer i en matris
- radekvivalenta matriser — man kan gå från den ena till den andra genom radoperationer
- ledande etta — en 1 som är första nollskilda element på en rad i en trappstegsmatris
- koordinatmatris — matris med koefficienterna (utan högerledet)
- utökad matris — matris med koefficienter och högerled
- homogent system — högerledet är bara nollor
- inkonsistent system — saknar lösning

Uppgift:

För vilka tal a är ekvationssystemet lösbart? Lös systemet för dessa a!

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 6x_3 + 11x_4 = a \end{cases}$$

Reducerad trappstegsform och Gauss-Jordan

En matris sägs vara på reducerad trappstegsform om:

- Den är på trappstegsform
- Alla ledande element är 1
- I varje kolumn som har en ledande 1:a är alla andra element 0

Gauss-Jordans metod innebär att man när man med Gauss-elimination fått matrisen på trappstegsform fortsätter med radoperationer så den blir på reducerad trappstegsform.

Rang

Sats. För varje matris A finns en unik matris S på reducerad trappstegsform som är radekvivalent med A.

Definition. Rangen av en matris A är antalet ledande 1:or i den matris S på reducerad trappstegsform som är radekvivalent med A. Beteckning: $\mathrm{rank}(A)$.

Exempel

Uppgift: Bestäm rang och reducerad trappstegsform av nedanstående matriser!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sats

Sats: Anta att den utökade matrisen $\left[A \mid \vec{b}\right]$ till ett linjärt ekvationssystem är radekvivalent med $\left[S \mid \vec{c}\right]$ som är i trappstegsform. Då gäller följande.

1. Det givna systemet är inkonsistent om och endast om någon rad i $\left[S \mid \vec{c}\right]$ är på formen $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \mid c \end{bmatrix}$ där $c \neq 0$.
2. Om systemet är konsistent finns två möjligheter. Antingen är antalet ledande element i S lika med antalet obekanta och systemet har unik lösning. Eller också är antalet ledande element i S mindre än antalet obekanta och systemet har oändligt många lösningar.

En sats till

Sats: Låt $\left[A \mid \vec{b}\right]$ vara ett system av m linjära ekvationer i n variabler. Då gäller följande.

1. Det givna systemet är konsistent om och endast om $\text{rank}(\left[A \mid \vec{b}\right]) = \text{rank}(A)$.
2. Om systemet är konsistent är antalet parametrar i den allmänna lösningen lika med antalet variabler minus rangen, dvs
$$\#\,\text{parametrar} = n - \text{rank}(A)$$

Korollarium: Låt $\left[A \mid \vec{b}\right]$ vara ett system av m linjära ekvationer i n variabler. Då är $\left[A \mid \vec{b}\right]$ konsistent för ALLA $\vec{b}$ i $\mathbf{R}^n$ om och endast om $\text{rank}(A) = m$.

Exempel

Exempel 1: Lös ekvationssystemet (Elektro!)

$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ 5I_1 + 20I_3 = 50 \\ 10I_2 + 20I_3 = -30 \end{cases}$$

Exempel 2: Lös ekvationssystemet (Kemi!)

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Homogena system

Definition: Ett linjärt ekvationssystem sägs vara homogent om högerledet bara består av nollor.

Observation: Ett homogent linjärt ekvationssystem har alltid den triviala lösningen $\vec{0}$.