KTH ROYAL INSTITUTE
OF TECHNOLOGY

EL1010 Reglerteknik AK

Föreläsning 3:
Stabilitet, rotort och Nyquistkriteriet

Dagens program

- Laplacetransformen (repetition, slides)
  - Överföringsfunktion, poler och nollställen
  - Stegsvar
  - Återkopplat system = slutet system
  - Se även extramaterial

- Rotort (tavla)

- Nyquistkriteriet (tavla)

Laplacetransformen

- Laplacetransform av differentialekvation (beg. värde = 0)

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_2 y(t) = b_0\dot{u}(t) + b_1 u(t)$$

$$\Downarrow \quad \mathcal{L}$$

$$s^2Y(s) + a_1 sY(s) + a_2 Y(s) = b_0 sU(s) + b_1 U(s)$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s + b_1}{s^2 + a_1 s + a_2}}_{G(s)} U(s) = \frac{B(s)}{A(s)} U(s)$$

- $G(s)$ = överföringsfunktion
- Rötter till $A(s) = 0$ kallas *poler* (avgör stabilitet och snabbhet)
- Rötter till $B(s) = 0$ kallas *nollställen* (påverkar initial riktning av stegsvar)

Stegsvar

- Välj enhetssteg som insignal $u(t) = 1,\ t \geq 0 \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} U(s) = \frac{1}{s}$

- Motsvarande utsignal kallas systemets *stegsvar:*

$$Y(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{B(s)}{A(s)}\frac{1}{s}$$

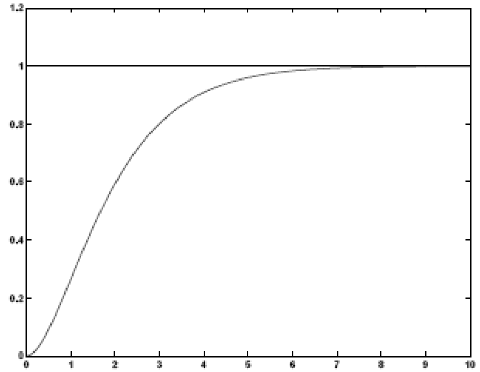
$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$y(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}, \quad \text{där} \quad A(\lambda_k) = 0$$

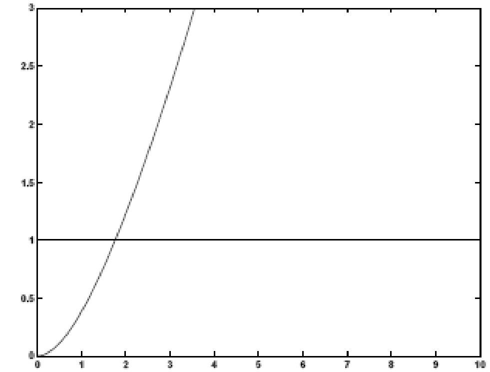
- Asymptotiskt stabilt om och endast om alla $\mathrm{Re}\,\lambda_k < 0$
- Stora $|\lambda_k|$ ger snabbare stegsvar
- Komplexa poler ger svängningar, som ökar med $\mathrm{Im}\,\lambda_k/\mathrm{Re}\,\lambda_k$

Stegsvarens principiella utseende

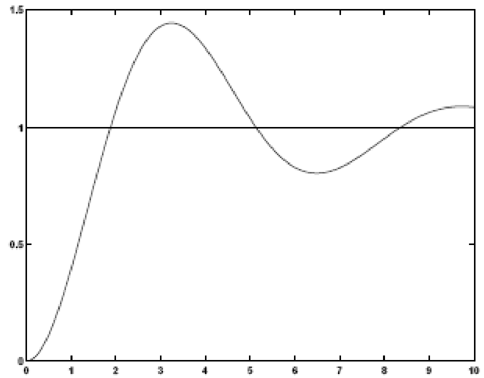
λ reella och negativa:



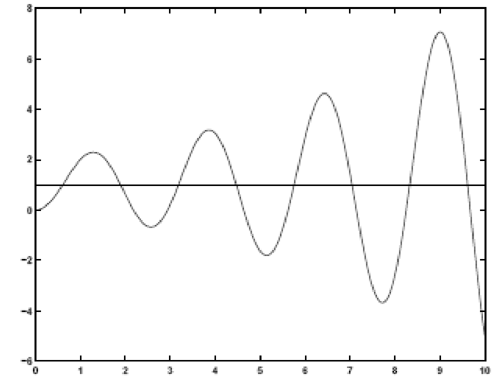
λ reella och positiva:



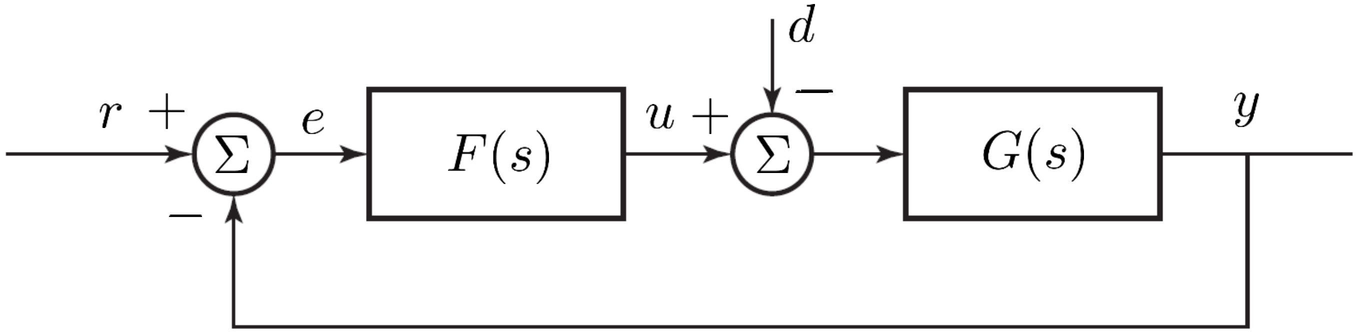
λ komplexa och $Re(\lambda) < 0$:



λ komplexa och $Re(\lambda) > 0$:



Återkopplat system = slutet system



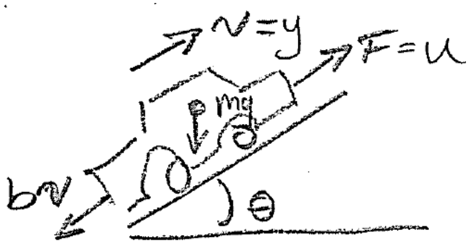
- System = $G(s)$, regulator = $F(s)$
- Slutna systemets överföringsfunktioner:

$$Y(s) = G(s)(F(s)\underbrace{[R(s) - Y(s)]}_{E(s)} - D(s)) \quad \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} R(s) - \frac{G(s)}{1 + G(s)F(s)} D(s)$$

- Återkoppling med $F(s)$ flyttar systemets poler!

Quiz



(1)

Överföringsfunktionerna för PI-reglerade bilen i Fö. 2 är

$$Y(s) = \frac{(K_P s + K_I)/m}{s^2 + (b + K_P)s/m + K_I/m} R(s)$$
$$- \frac{s/m}{s^2 + (b + K_P)s/m + K_I/m} D(s)$$

Vilka villkor på parametrarna motsvarar att återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt?

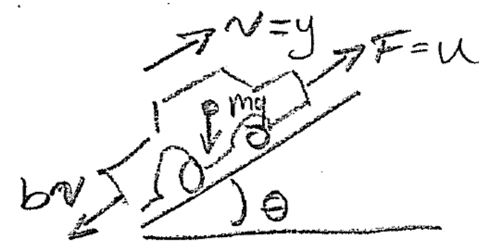
(a) $K_P > 0$ och $K_I > 0$

(b) $b + K_P > 0$ och $K_I > 0$

(c) $m > 0$ och $b > 0$

(d) $b + K_P > 0$

Quiz



(1)

Överföringsfunktionerna för PI-reglerade bilen i Fö. 2 är

$$Y(s) = \frac{(K_P s + K_I)/m}{s^2 + (b + K_P)s/m + K_I/m} R(s) - \frac{s/m}{s^2 + (b + K_P)s/m + K_I/m} D(s)$$

Vilka villkor på parametrarna motsvarar att återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt?

(a) $K_P > 0$ och $K_I > 0$

(b) $b + K_P > 0$ och $K_I > 0$

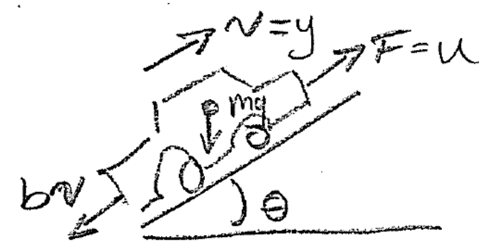
(c) $m > 0$ och $b > 0$

(d) $b + K_P > 0$

Korrekt svar: (b)
Allmänt gäller att

$$\begin{cases} s^2 + a_1 s + a_2 = 0 \\ \text{Re } s_1 < 0 \text{ och Re } s_2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a_1 > 0 \text{ och } a_2 > 0)$$

Quiz



(2)

Överföringsfunktionerna för PI-reglerade bilen i Fö. 2 är

$$Y(s) = \frac{(K_P s + K_I)/m}{s^2 + (b+K_P)s/m + K_I/m} R(s) - \frac{s/m}{s^2 + (b+K_P)s/m + K_I/m} D(s)$$

Vilka villkor på parametrarna motsvarar att statiska reglerfelet är noll, d.v.s.

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = r \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$$

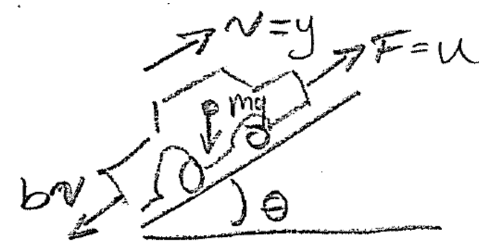
då $d(t)$ är en godtycklig stegfunktion och $r(t) = r$ (konstant)?

(a) $K_I > 0$

(b) $K_P > 0$ och $K_I > 0$

(c) $b + K_P > 0$ och $K_I > 0$

Quiz



(2)

Överföringsfunktionerna för PI-reglerade bilen i Fö. 2 är

$$Y(s) = \frac{(K_P s + K_I)/m}{s^2 + (b + K_P)s/m + K_I/m} R(s) - \frac{s/m}{s^2 + (b + K_P)s/m + K_I/m} D(s)$$

Vilka villkor på parametrarna motsvarar att statiska reglerfelet är noll, d.v.s.

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = r \Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} e(t) = 0$$

då $d(t)$ är en godtycklig stegfunktion och $r(t) = r$ (konstant)?

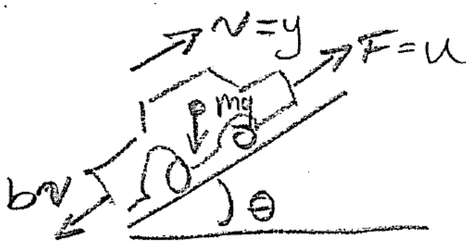
(a) $K_I > 0$

(b) $K_P > 0$ och $K_I > 0$

(c) $b + K_P > 0$ och $K_I > 0$

Korrekt svar: (c) [anv. slutvärdessatsen]
Reglerfel 0 vid steginsignaler fås av asymptotisk stabilitet *och* integralverkan $(K_I > 0)$

Farthållning med PI-regulator



- Modell av bilen med $m = 1000,\ b = 100,\ \theta = 0\,(d = mg\sin 0 = 0)$

$$G(s) = \frac{1/m}{s + b/m} = \frac{0.001}{s + 0.1}$$

- PI-regulator

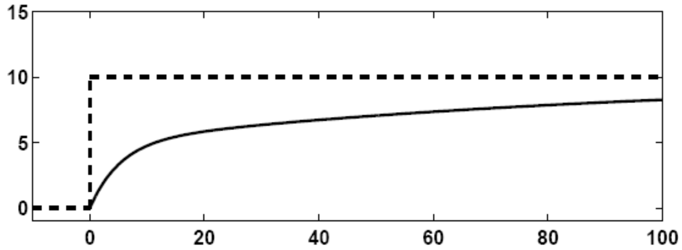
$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau)d\tau \quad \overset{\mathcal{L}}{\mapsto} \quad U(s) = \underbrace{\frac{K_P s + K_I}{s}}_{F(s)} E(s)$$

- Slutna systemets överföringsfunktion då $K_P = 100$

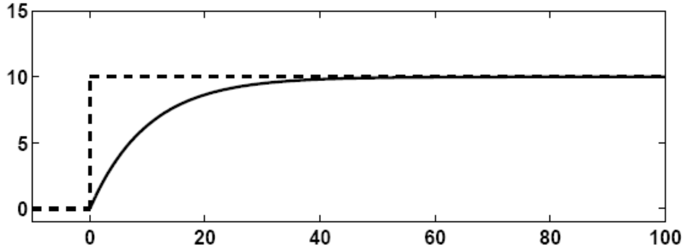
$$Y(s) = \frac{0.1s + 0.001K_I}{s^2 + 0.2s + 0.001K_I} R(s) \qquad (D(s) = 0)$$

Simulering av farthållningen

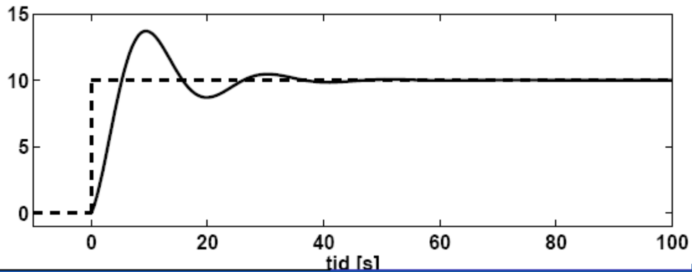
- $K_I = 2 \quad \rightarrow \quad$ poler: $s = -0.01, s = -0.19$



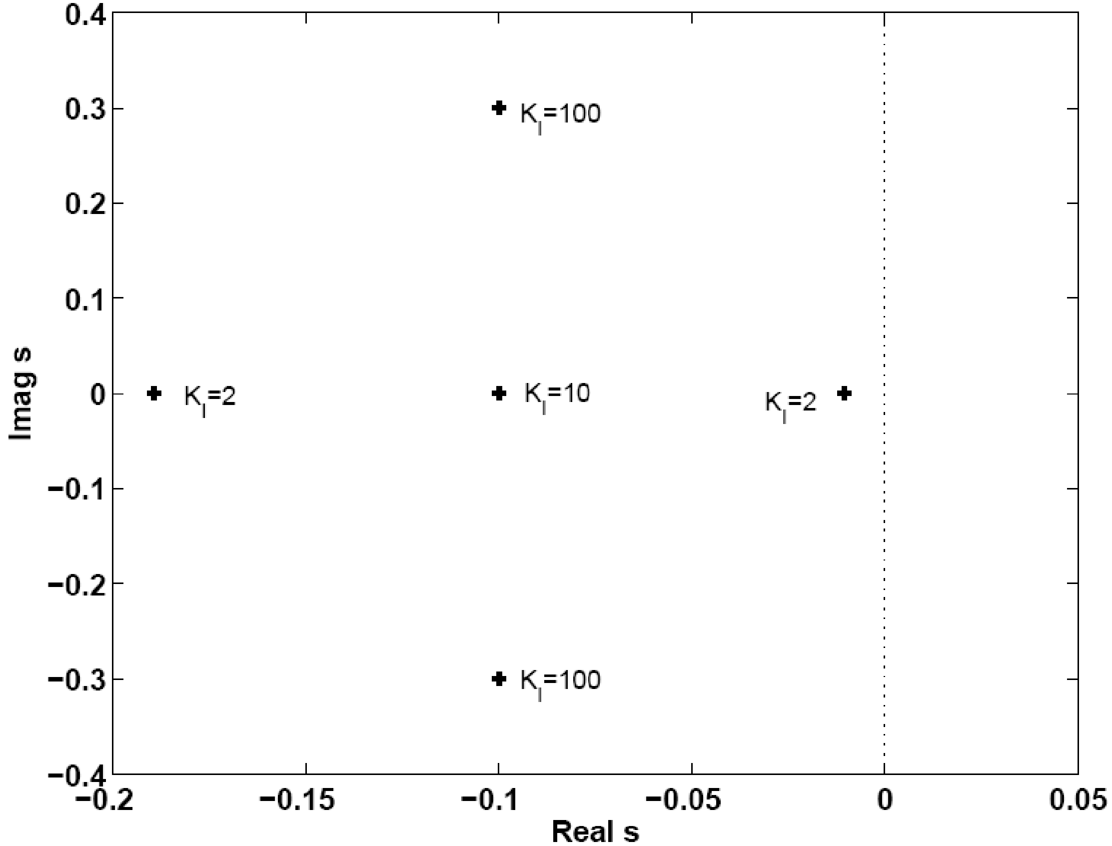
- $K_I = 10 \quad \rightarrow \quad$ poler: $s = -0.1, s = -0.1$



- $K_I = 100 \quad \rightarrow \quad$ poler: $s = -0.1 \pm i0.3$

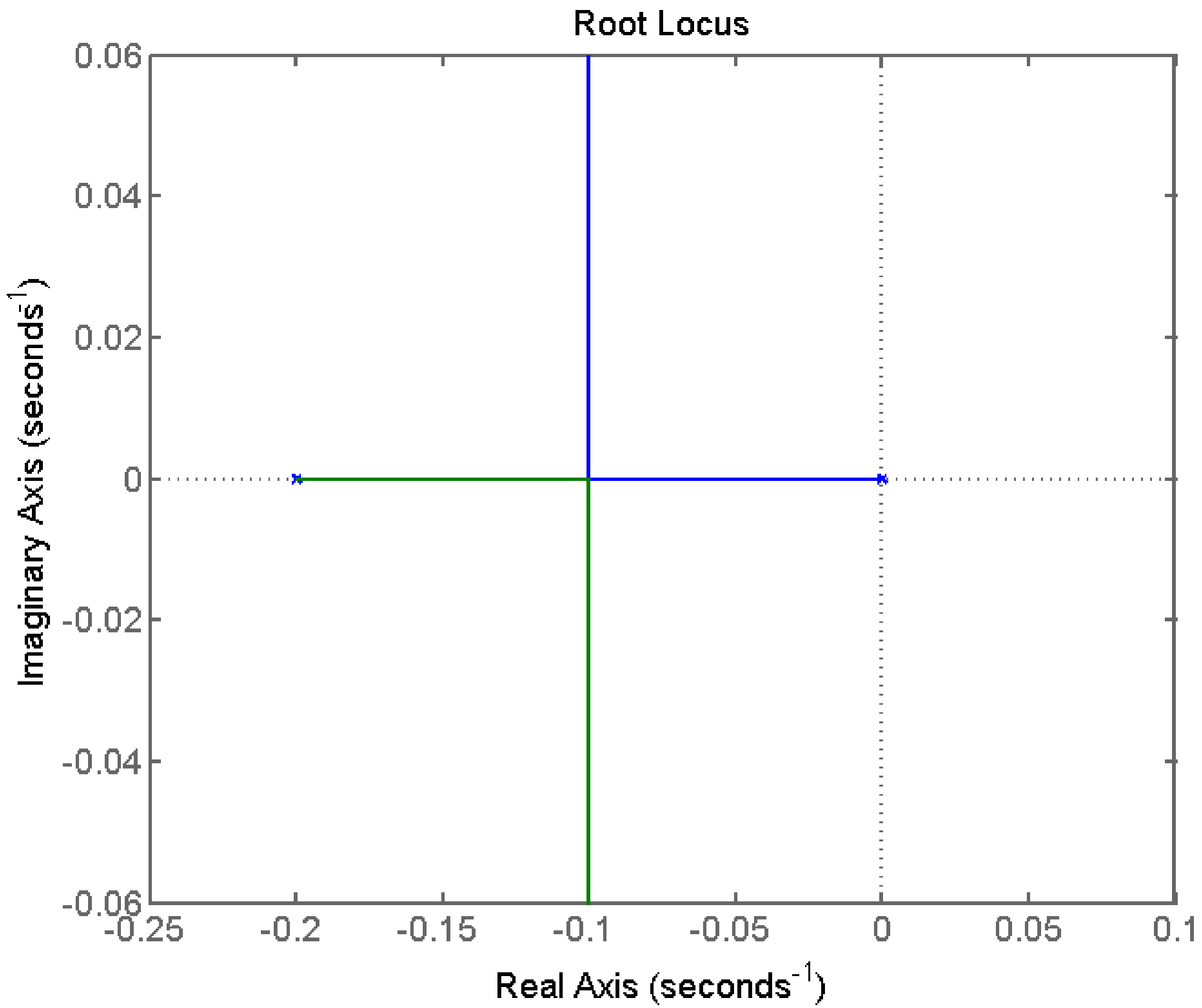


Slutna systemets poler för olika K_I



- Polernas läge som funktion av $K_I \Rightarrow$ **rotort**
- För vilka K_I hamnar någon pol i högra halvplanet $\Rightarrow$ **Nyquistkriteriet**

Rotorten med avseende på K_I ('rlocus' i Matlab)



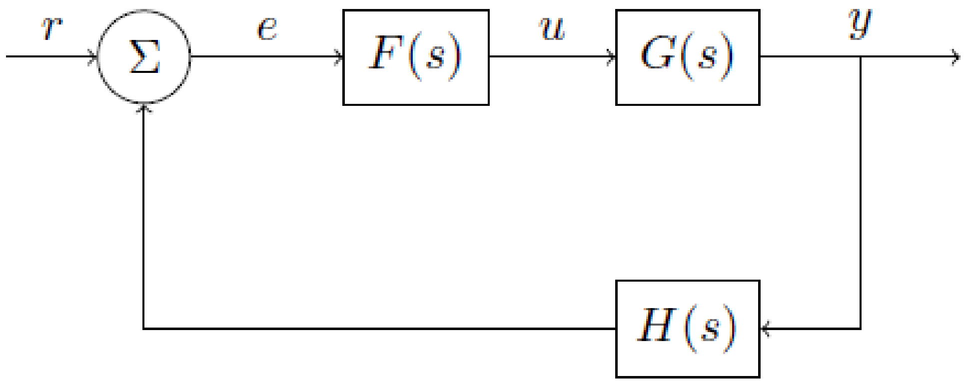
Harry Nyquist (1889-1976)

- Född 1889 i Värmland. Emigrerade till USA 1907
- Arbetade för Bell Labs 1917-1954
- Fick IRE (numera IEEE) Medal of Honor för:

"fundamental contributions to a quantitative understanding of thermal noise, data transmission and *negative feedback*"

Quiz

(3)



Vilket alternativ beskriver överföringsfunktionen mellan r och e?

(a) $\dfrac{1}{1+FGH}$

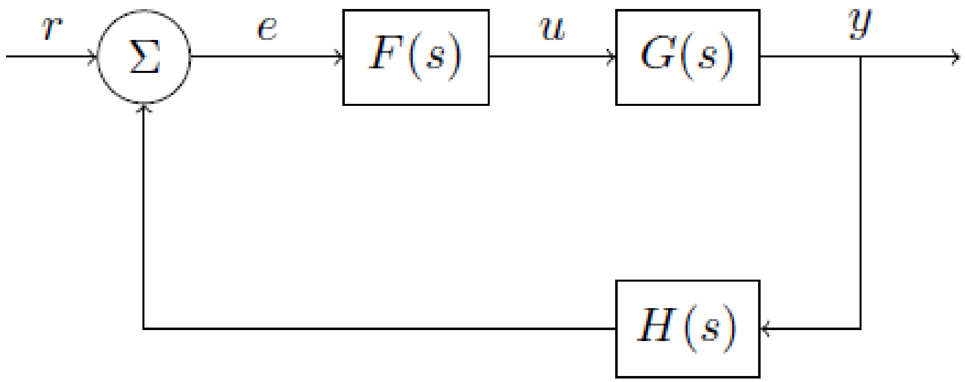
(b) $\dfrac{1}{1-FGH}$

(c) $\dfrac{1}{FGH-1}$

(d) 1

Quiz

(3)



Vilket alternativ beskriver överföringsfunktionen mellan r och e?

(a) $\dfrac{1}{1+FGH}$

(b) $\dfrac{1}{1-FGH}$

(c) $\dfrac{1}{FGH-1}$

(d) 1

Korrekt svar: (b)
Notera att $E = R + HGFE$