SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 4

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

7 november 2016

Veckans ämne:

Linjära ekvationssystem och Gauss-Jordans metod

- Vad är ett linjärt ekvationssystem?
- Formulering på matrisform
- Gauss-Jordans lösningsmetod med 3 radoperationer
- Hur kan lösningsmängden se ut?
- Speciellt om homogena system
- Tillämpningar på linjärt oberoende, span, delrum, bas mm

Idag:

Linjära ekvationssystem och Gauss-Jordans metod

- Vad är ett linjärt ekvationssystem?
- Formulering på matrisform
- Gauss-elimination med 3 radoperationer
- Hur kan lösningsmängden se ut?

Ett inledande exempel

Geometriskt exempel

Vi har tre plan i $\mathbf{R}^3$:

Π_1 ges av ekvationen $2x + 4y + z = 1$
Π_2 ges av ekvationen $x - y - z = 2$
Π_3 ges av ekvationen $x + y + z = 2$

Finns det någon punkt $P(x, y, z)$ som ligger på alla tre planen?

Linjära ekvationer

En linjär ekvation är en ekvation på formen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

där alla $a_1, \ldots, a_n, b$ är kända tal och $x_1, \ldots, x_n$ är obekanta.

Ett linjärt ekvationssystem är flera linjära ekvationer som ska lösas tillsammans, dvs man ska hitta alla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som löser samtliga ekvationer i systemet.

Varning: Det finns massor med ekvationer och ekvations-system som inte är linjära. Dessa måste löses med andra metoder än den metod vi lär oss denna vecka.

Vilka av nedanstående ekvationer är linjära?

A. $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 4711$

B. $51x + \pi y = 353z$

C. $3x_1x_2 + 4x_2x_3 = 5$

D. $x + \sqrt{y} = 13$

E. $\cos^2 x_1 + \sin^2 x_2 = 1$

Ett linjärt ekvationssystem

Finn alla tal x, y, z som uppfyller att

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Det finns tre tillåtna radoperationer:

1. Byta plats på två rader
2. Multiplicera en rad med en konstant $\neq 0$
3. Lägga en multipel av en rad till en annan rad

Målet är att få matrisen på trappstegsform:

1. Alla nollrader kommer underst i matrisen
2. När två rader som inte är nollrader står under varandra i matrisen så är det första nollskilda elementet på den övre raden till vänster om det första nollskilda elementet i den undre

Uppgift

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 4x - z = 11 \end{cases}$$

Uppgift

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 1 \\ -4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -2 \end{cases}$$

Uppgift

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 6x_4 = 6 \end{cases}$$

Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Terminologi

Ord:

- radreduktion — göra radoperationer i en matris
- radekvivalenta matriser — man kan gå från den ena till den andra genom radoperationer
- pivot-element — första nollskilda elementet i en rad
- ledande etta — ett pivotelement som är 1
- koordinatmatris — matris med koefficienterna (utan högerledet)
- utökad matris — matris med koefficienter och högerled
- homogent system — högerledet är bara nollor
- inkonsistent system — saknar lösning

Lösningsmängden:

Ett linjärt ekvationssystem har antingen

1. Oändligt många lösningar
2. En unik lösning
3. Inga lösningar

Sats

Sats: Anta att den utökade matrisen $\left[A \mid \vec{b} \right]$ till ett linjärt ekvationssystem är radekvivalent med $\left[S \mid \vec{c} \right]$ som är i trappstegsform. Då gäller följande.

1. Det givna systemet är inkonsistent om och endast om någon rad i $\left[S \mid \vec{c} \right]$ är på formen $\left[0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid c \right]$ där $c \neq 0$.
2. Om systemet är konsistent finns två möjligheter. Antingen är antalet pivot-element i S lika med antalet obekanta och systemet har unik lösning. Eller också är antalet pivot-element i S mindre än antalet obekanta och systemet har oändligt många lösningar.