

Innehåll:

- Koordinater i olika baser
- Basbyten

Koordinater i olika baser

1. **Definition.** Låt $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ vara en bas för ett delrum W i \mathbb{R}^n . Då kan varje vektor \vec{w} i W skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k.$$

Koefficienterna, c_1, c_2, \dots, c_k kallas för koordinater med avseende på basen \mathcal{B} . För att beteckna vektorn \vec{w} 's koordinater i basen \mathcal{B} skriver man

$$[\vec{w}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$$

$[\vec{w}]_{\mathcal{B}}$ kallas för koordinatvektor (eller koordinatmatris - i Anton).

Notera att koordinaterna för \vec{w} i basen \mathcal{B} uppfyller följande likhet

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_k][\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \vec{w}$$

2. Standardbas

Vektorerna $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bildar en bas till \mathbb{R}^3 . Den kallas

för standardbas. I standardbasen har vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ koordinaterna $\begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

3. **Uppgift.** $V = \text{Span}\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ där $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i \mathbb{R}^3 . Låt $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ vara en bas för V .

Bestäm vektorn \vec{v} 's koordinater i basen \mathcal{B} om $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. **Uppgift.** $V = \text{span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ där

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) Visa att $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ är en bas för V .

b) Låt \vec{v} vara en vektor i V som i basen \mathcal{B} har koordinaterna $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm \vec{v} .

c) Undersök om vektorn $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ligger i V . I sådant fall, bestäm koordinaterna av \vec{w} i basen \mathcal{B} .

Basbyten och basbytesmatriser

5. **Proposition.** Låt $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ vara vektorer i \mathbb{R}^n . Följande påståenden är ekvivalenta

- (1) $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ är en bas till \mathbb{R}^n .
- (2) $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ är linjärt oberoende.
- (3) $\text{span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} = \mathbb{R}^n$.
- (4) En matris med basvektorerna som kolonner, $A = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$ är inverterbar.

6. Låt \vec{v} vara en vektor i \mathbb{R}^n . Antag att vi byter från en bas \mathcal{B}_1 till en annan bas \mathcal{B}_2 . Hur ser relationen ut mellan koordinaterna för \vec{v} i \mathcal{B}_1 , $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$ och koordinaterna för \vec{v} i \mathcal{B}_2 , $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$ ut?

Låt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$. För att hitta koordinaterna för \vec{v} med avseende på basen \mathcal{B}_1 måste vi lösa systemet

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = \vec{v}.$$

Dvs koordinaterna för \vec{v} i basen \mathcal{B}_1 ges av

$$(1) \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]^{-1}\vec{v}.$$

Låt $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$. För att hitta koordinaterna för \vec{v} med avseende på basen \mathcal{B}_2 måste vi lösa systemet

$$[\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \dots \ \vec{w}_n][\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = \vec{v}.$$

Dvs koordinaterna för \vec{v} i basen \mathcal{B}_2 ges av

$$(2) \quad [\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} \vec{v}.$$

Från sambanden (1) och (2) ovan kan vi hitta en relation mellan $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$ och $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} \vec{v} = [\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n] [\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}$$

Matrisen $[\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \cdots \ \vec{w}_n]^{-1} [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \cdots \ \vec{v}_n]$ kallas för basbytesmatris (övergångsmatris) från \mathcal{B}_1 till \mathcal{B}_2 och betecknas med $P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$. Dvs

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2} = P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} [\vec{v}]_{\mathcal{B}_1}.$$

7. Proposition (se teorem 7.11.3 i Anton).

Basbytesmatrisen ges av

$$P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} = [[\vec{v}_1]_{\mathcal{B}_2} \ [\vec{v}_2]_{\mathcal{B}_2} \ \cdots \ [\vec{v}_n]_{\mathcal{B}_2}].$$

där kolonnerna i matrisen är koordinaterna för basen \mathcal{B}_1 med avseende på basen \mathcal{B}_2 .

8. Uppgift.

a) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i \mathbb{R}^3 :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

b) Bevisa att följande vektorer bildar en bas i \mathbb{R}^3 :

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Låt $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$.

c) Antag att $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{v}]_{\mathcal{B}_2}$.

d) Antag att $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Bestäm $[\vec{w}]_{\mathcal{B}_1}$.

9. Om U är ett delrum i \mathbb{R}^n och $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ och $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ är två baser till U . Då är basbytesmatrisen från \mathcal{B}_1 till \mathcal{B}_2 en $k \times k$ matris $P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2}$ sådan att för alla vektorer \vec{u} i U gäller

$$P_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_2} [\vec{u}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{u}]_{\mathcal{B}_2}$$

10. **Uppgift.** (Tenta 4/6-13, B-delen)

Vektorerna

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

bildar en bas $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ för delrummet W i \mathbb{R}^4 . Matrisen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

är övergångsmatrisen (basbytesmatrisen) som omvandlar koordinater med avseende på basen \mathcal{B}_1 till koordinater med avseende på basen $\mathcal{B}_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$. Bestäm vektorerna \vec{v}_1 och \vec{v}_2 .

11. **Uppgift.** (Tenta 13/12-12, B-delen)

Låt $\mathcal{B} = \{\vec{e}, \vec{f}\}$ vara en bas för ett delrum V i \mathbb{R}^n . Låt \vec{u} och \vec{v} vara två vektorer i \mathbb{R}^n som uppfyller relationerna

$$\vec{u} + \vec{e} = \vec{v} \quad \vec{f} + 2\vec{u} = -3\vec{v}$$

- a) Bestäm koordinatvektorn till \vec{v} med avseende på basen \mathcal{B} .
- b) Visa att vektorerna \vec{u} och \vec{v} också utgör en bas för V .