Förre lovet så visade vi att

$$C^0([a,b]) = \{ f(x);\ f(x) \text{ kontinuerlig på } [a,b] \}$$

är ett komplett rum med ~~[illegible]~~ metriken

$$d(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-g(x)|.$$

Kommer konvergens under metriken d även att ~~g~~ bete sig väl i relation till integralen och derivator?

Sats: Antag att f_j är Riemannintegrerbara på $[a,b]$ och $f_j \rightrightarrows f$. Då är f Riemannintegrerbar och

$$\lim_{j\to\infty} \int_a^b f_j(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \int_a^b \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,dx \right)$$

Bevis: Vi måste visa att $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists$ indelning P_j

$$U(f) - L(f) < \varepsilon$$

Välj j så stort att $d(f, f_j) < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$

Eftersom f_j är integrerbar så kan vi välja en indelning så

$$U(f_j, P_j) - L(f_j, P_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Men eftersom $|f_j - f| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$ så $U(f, P_j) \le U(f_j, P_j) + \frac{\varepsilon}{4}$

$$L(f, P_j) \ge L(f_j, P_j) - \frac{\varepsilon}{4}$$

Så

$$U(f,P_i) - L(f,P_i) \le U(f_i,P_i) - L(f_i,P_i) + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon .$$

Så f är integrerbar.

Vidare så $\left| \int_a^b f_i - f \, dx \right| \le \int_a^b |f_i - f| \, dx$

$$\le \int_a^b d(f_i, f) \, dx \le (b-a)\, d(f_i, f) \to 0 .$$

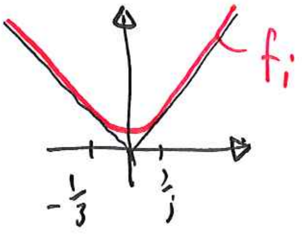
Slutsats: Vi kan byta ordning på integralen och likformig konvergens.

Sats: Antag att $f_j \rightrightarrows f$ och $f_j' \rightrightarrows g$.

Då kommer f att vara deriverbar och $f' = g$.

Exempel: Låt $f_j(x) = \begin{cases} |x| & |x| \ge \frac{1}{j} \\ \frac{j}{2} x^2 + \frac{1}{2j} & |x| < \frac{1}{j} \end{cases}$

Då:



Då kommer $f_j \rightrightarrows |x|$

f_j' existerar och konvergerar punktvis

Men $f_j' \not\rightrightarrows f'$ vilken inte existerar.

Bevis: Vi måste visa att f' existerar.

För att göra det så definerar vi hjälpfunktionerna

$$e_j(t) = \begin{cases} \dfrac{f_j(t) - f_j(x)}{t - x} & t \neq x \\ f_j'(x) & t = x \end{cases}$$

$$e(t) = \begin{cases} \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} & t \neq x \\ g(x) & t = x \end{cases}$$

Observera att $e_j(t)$ är kontinuerlig eftersom $e(t)$ är kont då $t \neq x$ eftersom f_j är kont och $e_j(t)$ är kont i $t = x$ eftersom f_j är deriverbar.

Vidare så

$$\left| e_j(t) - e_k(t) \right| = \left| \frac{\left(f_j(t) - f_k(t)\right) - \left(f_j(x) + f_k(x)\right)}{t - x} \right| = \left| f_k'(\theta_{j,k}) - f_j'(\theta_{j,k}) \right|$$

$\leq d(f_k', f_j')$ oberoende av t.

Så e_j är Cauchy och konvergerar därför.

Eftersom e_j är kontinuerlig i x så kommer $\lim_{j \to \infty} e_j = e$ att vara kont. i $t = x$ $\Rightarrow \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = g(x)$

$\boxed{\begin{array}{l} \underline{\text{Följdsats}} \quad \text{Om } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \text{ där serien har} \\ \text{konvergensradien } R = \dfrac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}} \quad (\text{Rot testet}) \\ \text{då kommer } f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}. \\ \text{för } |x| < R. \end{array}}$

<u>Bevis</u>: Vi vet redan att $f_k = \sum_{n=0}^{k} c_n x^n \rightrightarrows f$

$\Downarrow$

vi vill visa att $f_k'(x) \rightrightarrows g(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} n c_n x^{n-1}$

Vi använder rot testet igen

konvergensradien för $g(x)$ är $\dfrac{1}{\limsup_{l\to\infty} \sqrt[l]{l c_l}} =$

$$= \frac{1}{\limsup_{l\to\infty} \sqrt[l]{l}\,\sqrt[l]{c_l}} = \left(\begin{array}{l} \sqrt[l]{l} \to 1 \\ \sqrt[l]{c_l} \to \frac{1}{R} \end{array} \right) = \frac{1}{R}.$$

∎

Vi har visat att $C^0([a,b])$ är komplett.

Men en av de kraftfullaste metoderna i analysen är kompakthet. Kommer en begränsad följd $\|f_k\| \le M$ att ha en konvergent delföljd $f_{k_j} \rightrightarrows f$?

Exempel: Låt $f_k = \cos(kx) \in C^0([0,2\pi])$ då kommer $\|f_k\| = 1$ men $f_{k_j} \not\rightrightarrows f$ för någon delföljd k_j och något $f \in C^0([0,2\pi])$

Hur bevisar man detta?

Steg 1: f kan inte vara identiskt $= 0$ för då $\|f_{k_j} - f\| = \|f_{k_j}\| = 1 \not\to 0$.

Steg 2: Så $f(x_0) > 0$ eller $f(x_0) < 0$ för något x_0.

Säg $f(x_0) = \delta > 0 \overset{f \in C^0}{\Longrightarrow} f(x) > \delta/2$ i $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

~~Välj i man j så stort att $\frac{2\pi}{j} < \varepsilon$~~

~~Då kommer det för $k \geq j$ att finnas ett $0 \le l \le k$ så att~~

~~Observera att $\left\{\frac{j\pi}{l};\ j, l \in \mathbb{N}\right\}$ är en tät mängd~~

:

men $f_k(x) = -1$ för $x = \frac{2l\pi + \pi}{k}$ för $l = 0, 1, \ldots$

så om $\frac{2\pi}{k} < \varepsilon$ så finns det ett l så $f(x) = -1$

Problemet är att f_k har för stora oscillationer.

<u>Def</u>: Vi säger att

$\mathcal{A} \subset C^0(D)$ är ekvikontinuerlig

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta$ så att

$f \in \mathcal{A}, \quad |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$

~~Obs: $\mathcal{A}$ är ekvi kont. i alla $x_0 \in [a,b]$ så säger att $\mathcal{A}$ är ...~~

<u>Sats</u>: [Arzela-Ascoli] Om $f_k \in C^0(a,b)$ är en ekvi-kontinuerlig följd av likformigt begränsade ($\|f_k\| \le M$ för alla k) funktioner så har f_k en delföljd $f_{k_j} \rightrightarrows f \in C^0(a,b)$.

Bevis:

Steg 1 (välj k_j).

1) $(a,b)\cap\mathbb{Q}$ är uppräknelig $(a,b)\cap\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Betrakta $f_k(a_1)$ sequensed i $\mathbb{R}$. $\underset{BW}{\Rightarrow}$ $f_{k_{1,j}}(a_1) \to A_1$

f_{k_j}

$$
\begin{array}{llllll}
a_1 & f_{k_{1,1}}(a_1) & f_{k_{1,2}}(a_1) & f_{k_{1,3}}(a_1) \quad f_{k_{1,3}}(a_1) & \dots & \to A_1 \\
a_2 & f_{k_{2,1}}(a_2) & f_{k_{2,2}}(a_2) & f_{k_{2,3}}(a_2) \quad f & \dots & \to A_2 \\
a_3 & f_{k_{3,1}}(a_3) & \dots & & & \to A_3.
\end{array}
$$

Betrakta delföljden $f_{k_{1,j}}(a_2)$ sequensed i $\mathbb{R}$

$\exists$ konvergent delföljd $f_{k_{2,j}}(a_2) \to A_2$.

Välj delföljd av $f_{k_{2,j}}(a_3)$ så $f_{k_{3,j}}(a_3) \to A_3$

induktivt delföljd av $f_{k_{l,j}}(a_{l+1})$

så $f_{k_{l+1,j}}(a_{l+1}) \to A_{l+1}$.

Definiera $f_{k_j}(x) = f_{k_{j,j}}(x)$

då kommer $f_{k_j}(a_\ell)$ för $j \geq \ell$

att vara en delföljd av $f_{k_{\ell,j}}(a_\ell)$

så $f_{k_j}(a_\ell) \to A_\ell$ för alla ℓ.

<u>Steg</u> <u>2</u>: $f_{k_j}(x)$ konvergerar likformigt för alla x.

Då f_{k_j} kont $\Rightarrow$ f kont

<u>Bevis</u>: Välj ε godtyckligt.

Eftersom f_k är ekvi kont. så existerar

det ~~för varje a_k~~ ett $\delta_k > 0$ så att

$$|x - a_k| < \delta_k \Rightarrow |f_{k_j}(x) - f_{k_j}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Men $(a_k - \delta, a_k + \delta)$ är en öppen övertäckning av

(a, b) så det finns en ändlig delövertäckning

$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \ldots (a_\ell - \delta, a_\ell + \delta)$.

Eftersom $f_{k_j}(a_k) \to A_k$ och därför är Cauchy

så finns det ett j_ε så att

$|f_{k_j}(a_k) - f_{k_m}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{3}$ för $j, m > j_\varepsilon$

Välj nu ett godtyckligt $x \in (a,b) \in \bigcup_{k=1}^{\ell} (a_k - \delta, a_k + \delta)$

säg $x \in (a_n - \delta, a_n + \delta)$. Då kommer för $j, m > j_\varepsilon$

$$|f_{k_j}(x) - f_{k_m}(x)| \le \overbrace{|f_{k_j}(x) - f_{k_j}(a_k)|}^{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ ekvikont}} + \overbrace{|f_{k_m}(x) - f_{k_m}(a_k)|}^{< \varepsilon/3}$$

$$+ \overbrace{|f_{k_j}(a_k) - f_{k_m}(a_k)|}^{< \varepsilon/3 \quad j,m > j_\varepsilon} < \varepsilon.$$

Så för alla $\varepsilon > 0$ $\exists\, j_\varepsilon$ så att

för alla $x \in (a,b)$ så kommer $j, m > j_\varepsilon$ att implicera

$$|f_{k_j}(x) - f_{k_m}(x)| < \varepsilon.$$

Så $f_{k_j}(x)$ är en Cauchy följd i $C^0((a,b))$

och konvergerar därför eftersom $C^0([a,b])$ är

Cauchy-komplett.

$\blacksquare$