F14

Konvergens av funktioner.

Låt $f_j(x)$ vara en följd av funktioner definierade på D (säg $D=[a,b]$).

Vad innebär det att $f_j \to f$ då $j \to \infty$?

Vi är fria att definiera begrepp hur vi vill. Men vi vill definiera begrepp så att vi får en vettig teori.

<u>Exempel</u>: Vi säger att $f_j \to f$ på $[a,b]$ om det för varje $x \in [a,b]$ gäller

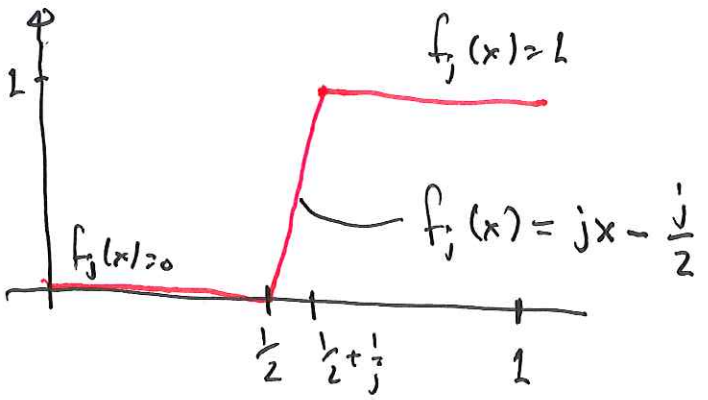
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$$

(konvergens i vanlig mening för talen $f_j(x) \in \mathbb{R}$)

Vi kallar detta för <u>punktvis konvergens</u>.

<u>Problem</u>: Låt

$f_j(x) =$



då kommer

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & x > \frac{1}{2} \\ 0 & x \le \frac{1}{2} \end{cases}$$

Så $f_j(x) \to f(x)$ punktvis.

Men $f(x)$ är diskontinuerlig trots att $f_j(x)$ är kontinuerlig för alla j!

Så konvergensen bevarar inte egenskapen hos följden ~~i~~ alla fall inte kontinuitet.

Exempel: Låt $f_j(x) = \begin{cases} 2^{n+1} & 2^{-n-1} < x < 2^{-n} \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$ på $(0,1)$

Då kommer $f_j(x) \to f(x) = 0$ för alla x.

Dock så kommer

$$\lim_{j\to\infty} \int_0^1 f_j(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \lim_{j\to\infty} f_j(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Så integraler bevaras inte heller under punktvis konvergens.

Om vi vill att $f_j \to f$ ska innebära att ~~?~~ viktiga egenskaper, såsom kontinuitet eller integrerbarhet, för f_j även gäller för f så måste vi hitta ett annat sätt att definiera konvergens.

Definition: Låt f_j och f vara definierade på D. Då säger vi att $f_j \rightrightarrows f$ (konvergerar likformigt till f) om

$$\|f-f_j\|_{sup} = \sup_{x\in D} |f(x)-f_j(x)| \to 0 \quad \text{då } j\to\infty.$$

Intuitivt betyder det att då $j > N_\varepsilon$ så skiljer sig $f(x)$ från $f_j(x)$ med maximalt ε för alla $x \in D$!

Är definitionen för likformig kontinuitet "rätt"? (inte för att det finns rätta definitioner vad som är rätt beror på vad vi vill - matte är kreativt!)

Det beror på om vi kan använda definitionen för att visa satser!

Sats: Låt $f_j \rightrightarrows f$ på (a,b) och antag att varje f_j är kontinuerlig i x_0. Då är f kontinuerlig i x_0

Följdsats: Om $f_j \rightrightarrows f$ på (a,b) och f_j är kontinuerliga, då är f kontinuerlig.

Bevis: Det handlar om att flytta information från f_j till f. Frågan är bara om likformig konvergens är ett tillräckligt starkt villkor för att "flytta över kontinuitet".

Vi vill visa att $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ så att

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}_{\text{Vill byta } f \text{ mot } f_j \text{ som vi vet något om.}}$$

Eftersom $f_j \rightrightarrows f$ så finns det ett $N > 0$ så att

$$|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{för alla } j > N. \text{ och alla } x \in (a,b)$$

Välj ett sådant j, säg $j \geq N+1$. Då kommer, eftersom f_j är kontinuerlig i x_0, det att finnas ett $\delta > 0$ så att

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_j(x) - f_j(x_0)| < \varepsilon/3.$$

Därför så kommer

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = \Big|\big(f(x) - f_j(x)\big) + \big(f(x_0) - f_j(x_0)\big) + \big(f_j(x) - f_j(x_0)\big)\Big| \leq$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_j(x)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ då } j > N} + \underbrace{|f(x_0) - f_j(x_0)|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{|f_j(x) - f_j(x_0)|}_{< \frac{\varepsilon}{3} \text{ då } |x - x_0| < \delta} < \varepsilon. \quad \blacksquare$$

Exempel! Låt $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos(jx) \qquad x \in [0, 2\pi]$

och $|a_j| \leq \frac{C}{j^2}$ för något C. Då är

$f(x)$ kontinuerlig!

Bevis: Låt $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cos(jx)$

Då kommer, $m > n$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \cos(jx) \right| \leq \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{C}{j^2} \leq$$

$$\cancel{\leq C \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{(n+1)n}}$$

$$\leq C \sum_{j=n+1}^{m} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = C \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right) < \frac{C}{n}$$

Låt $m \to \infty$ så får vi

$|f_n(x) - f(x)| < \frac{C}{n}$ för alla x $\Rightarrow$ $f_n \rightrightarrows f$ $\square$

Definition: Vi definierar $C_b(D)$ som det metriska rum bestående av alla begränsade funktioner definierade på D. Med metriken

$$d(f,g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| = \|f-g\|_{sup}.$$

Proposition: $d(f,g)$ är en metrik, dvs

i) $d(f,g) \geq 0$ och $d(f,g) = 0$ omm $f = g$

ii) $d(f,g) = d(g,f)$

iii) $d(f,h) + d(h,g) \geq d(f,g)$.

Bevis: i) och ii) uppenbara.

För iii) så får vi

$$d(f,g) = \sup_{x \in D} |f(x) - g(x)| = \sup_{x \in D} |f(x) - h(x) + (h(x) - g(x))| \leq$$

$$\leq \sup_{x \in D} \left(|f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)| \right) \leq \sup_{x \in D} |f(x) - h(x)| + \sup_{x \in D} |g(x) - h(x)|.$$

Den sista olikheten är ganska uppenbar.

Tänk på följande sätt

$$\sup_{x \in D} \left(|f(x) - h(x)| + |g(x) - h(x)| \right) = \sup_{\substack{x,y \in D \\ x = y}} \left(|f(x) - h(x)| + |g(y) - h(y)| \right)$$

Bivillkor

men om vi tar bort bivillkoret så blir optima större!

Sats: $C_b(D)$ är ett komplett rum.

Bevis: Låt f_i vara en Cauchy följd i $C_b(D)$

Då kommer, för alla $\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon$ så ~~f~~ $j,k > N \Rightarrow$

$$|f_j(x) - f_k(x)| \leq \sup_{y \in D} |f_j(y) - f_k(y)| = \|f_j - f_k\|_{sup} < \varepsilon$$

så $f_j(x)$ är en Cauchy följd i $\mathbb{R}$ för alla $x \in D$.

Cauchy följder konvergerar så vi kan definiera $f(x) = \lim_{j \to \infty} f_j(x)$ (punktvis).

Vi måste visa att $f(x) \in C_b(D)$.

Men, det exsisterar ett $N_1 > 0$ så att $j,k > N_1$

$\sup |f_j(x) - f_k(x)| < 1$ för alla x.

Låt $k \to \infty$, då kommer enl. sats om olikhet i gränsövergång

$$|f_j(x) - \underbrace{f(x)}_{\lim_{k \to \infty} f_k}| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f_j(x)| + 1$$

för alla x.

Men $f_1(x) \in C_b(D)$ så $|f_1(x)| \leq M$ för något M och alla x

Så $|f(x)| \leq M+1 \Rightarrow f(x)$ begränsad $\Rightarrow f \in C_b(D)$. $\square$

<u>Definition</u>: Vi definierar $C^0(D)$ att vara det metriska rum bestående av kontinuerliga funktioner i sup metriken.

<u>Sats</u>: $C^0(D)$ är komplett.

<u>Bevis</u>: f_j Cauchy. $\Rightarrow f_j \to f_0$ likformigt precis som i förra satsen och f_0 begränsad.

Men likformig konvergens bevarar kontinuitet så f_0 är kontinuerlig

$\Rightarrow f_0 \in C^0(D)$.

$\blacksquare$