F13 Förra föreläsningen gjorde vi analysens huvudsats.

Nu

Sats (Variabelbyte): Antag att $g:[c,d] \longmapsto [a,b]$ och att $g' > 0$ är kontinuerlig. Antag vidare att f är integrerbar på $[a,b]$. Då kommer

$$\int_a^b f(y)\,dy = \int_c^d f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Bevis: Vi antar att f är integrerbar.

Men vi måste visa att $f(g(x))g'(x)$ är integrerbar.

Vi vet att g' är integrerbar (då kontinuerlig) och därför så är $f(g(x))g'(x)$ integrerbar om $f(g(x))$ är det,

Förra föreläsningen: **Corollary**: $f(g(x))$ integrerbar om g är en homeomorfi $[c,d] \to [a,b]$ och g^{-1} uppfyller Lipschitz

$$|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)| \leq K\,|x-y|$$

$g' > 0 \implies g$ strängt växande och kontinuerlig (då g' existerar)

$\implies g$ är en homeomorfi

Så vi måste visa att g^{-1} uppfyller Lipschitz.

Enligt sats om inversa funktioners derivator så

$$Dg^{-1}(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} \, . \qquad (1)$$

Och g' kontinuerlig på kompakta mängden $[c,d]$

implicerar att $\inf_{[c,d]} g' = \underbrace{g'(y) > 0}_{\text{enl. antagande}}$ existerar (2)

så (1) & (2) implicerar att

$$|Dg^{-1}(x)| \leq \frac{1}{\inf g'(y)} \leq K \quad \text{för} \quad K = \frac{1}{\inf g'(y)} \, .$$

Integralkalkylens medelvärdessats implicerar att

$$|g^{-1}(x) - g^{-1}(y)| \leq |x-y| \, |Dg^{-1}(z)| \leq K \, |x-y|$$

för något $z \in (x,y)$. g^{-1} uppfyller Lipschitz

Vi kan dra slutsatsen att $f(g(x))g'(x)$ är

integrerbar.

Eftersom $f(g(x))g'(x)$ är integrerbar så

finns det för varje $\varepsilon > 0$ en indelning

$$c = x_0 < x_1 < \dots < x_n = d$$

så att, för varje tag $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(g(t_k))\, g'(t_k)\, (x_k - x_{k-1}) - \int_c^d f(g(x))g'(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

Dvs $\sum_{k=1}^{n} f(g(t_k))(x_k - x_{k-1}) \longrightarrow \int_c^d f(g(x))g'(x)\,dx$ då $\delta(P) \to 0$

Välj nu t_k enl. medelvärdessatsen så

$$g'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \underbrace{g(x_k)}_{=y_k} - \underbrace{g(x_{k-1})}_{y_{k-1}},$$

eftersom $|g'(x)| < M$ (då g' kont på $[c,d]$) så $|y_k - y_{k-1}| \to 0$ då $|x_k - x_{k-1}| \to 0$

Då kan vi skriva Riemannsumman för $\int_a^b f(y)\,dy$

med indelning $a = \underbrace{y_0 < y_1}_{g \text{ växande}} \dots < y_n = b$, $s_k = g(t_k)$

~~$\sum f(g(x_k))$~~

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} f(s_k)(y_k - y_{k-1})}_{= \sum f(g(t_k))g'(t_k)(x_k - x_{k-1})} \longrightarrow \int_a^b f(y)\,dy$$

$$\longrightarrow \int_c^d f(g(x))g'(x)\,dx.$$

då $|y_k - y_{k-1}| \to 0$, dvs då $|x_k - x_{k-1}| \to 0$

Sats [partiell integration]. Antag att $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ är deriverbara och f', g' är integrerbara.

Då kommer

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)\, g'(x)\,dx.$$

Bevis: Enkelt.

Serier

Vi ska fortsätta med lite envarre repetition för att det är viktigt och för att det är basmaterial som man behöver för all analys.

Vi börjar med att påminna oss om definitionen av en oändlig serie

Definition: Låt a_j vara en talföljd och definiera

$S_k = \sum_{j=1}^{k} a_j$. Då säger vi att $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergerar till S om $\lim_{k \to \infty} S_k = S$. Vi skriver $\sum_{j=1}^{\infty} a_j = S$.

Om $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ inte konvergerar till något tal $S \in \mathbb{R}$ så säger vi att $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ divergerar

Exempel: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ om $|\lambda|<1$

och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k$ divergerar om $|\lambda| \geq 1$.

Beviset är en övning.

Lemma (Cauchy kriterium för konvergens): $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerar om och endast om $\forall \varepsilon\ \exists N>0$ så

$$m,n > N \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \varepsilon$$

Bevis: $\displaystyle |s_m - s_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right|$ så kriteriet implicerar att s_n är Cauchy. Samma sak omvänt.

Lemma: (Jämförelse kriteriet för konvergens). Antag att $|a_k| \leq b_k$ för alla k och att $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergerar. Då kommer $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ att konvergera.

Bevis: $\sum b_k$ konvergerar $\Rightarrow \exists N>0$ så $\displaystyle \varepsilon > \left|\sum_{k=n}^{m} b_k\right| \overset{b_k \geq 0}{\geq} \sum_{k=n}^{m} |b_k| \geq$

$$\geq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \geq \left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right|.$$

Definition: Vi säger att $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ är absolut konvergent om $\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|$ är konvergent. ~~Annars~~

Om $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ är konvergent men inte absolut konvergent så säger vi att $\sum a_j$ är villkorligt konvergent.

Sats: 1) Om $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ är absolut konvergent så är $\sum a_j$ konvergent.

2) Om $\sum a_j$ är villkorligt konvergent så finns det för varje $A \in \mathbb{R}$ en bijektion $b: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ så att

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{b(j)} = A.$$

Bevis: 1) Om $\sum a_j$ är absolut konvergent så $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |a_j| = S$. Dvs för varje $\varepsilon > 0$ $\exists N$, ~~m~~ så att $n > N$

$$\varepsilon > \left| S - \sum_{j=1}^{n} |a_j| \right| = \left| \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{m} |a_j| - \sum_{j=1}^{n} |a_j| \right| =$$

$$= \left| \lim_{m\to\infty} \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| \right| \geq \begin{Bmatrix} m > n \\ \text{då } |a_j| \geq 0 \end{Bmatrix} \geq \left| \sum_{j=n+1}^{m} |a_j| \right| \geq \left| \sum_{j=n+1}^{m} a_j \right|$$

så $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergerar enl. Cauchy kriteriet.

Jag tänkte inte bevisa 2) eftersom den inte ingår i boken. ~~Istället~~ (och beviset kräver massa knepig notation) Istället tänkte jag visa, genom ett exempel, hur beviset går till.

<u>Exempel</u>: Det finns en bijektion $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ så att
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{b(j)+1}}{b(j)} = 100.$$

Observera att
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j} = \ln(2).$$

Bijektionen är bara ett sätt att ändra ordningen på termerna. Så "+ är inte kommutativ för oändliga serier".

Vi har termerna

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \ldots$$

Om vi tar positiva och negativa för sig så får vi

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11} \ldots$ och $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2j-1}$ divergerar

(då $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1} \geq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \to \infty$ då $n \to \infty$)

och

$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \ldots$ $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{-1}{2j}$ divergerar $\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{-1}{2j} \leq \sum_{j=2}^{2n+1} \frac{-1}{j} \right)$

Induktion. b) Ta så många positiva termer som behövs

för att $\sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2j-1} > 100$, säg $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n_1-1} > 100$

Lägg till så många negativa n_2 termer så att

$$\sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{-1}{2j} < 100.$$ (m.h.t 2

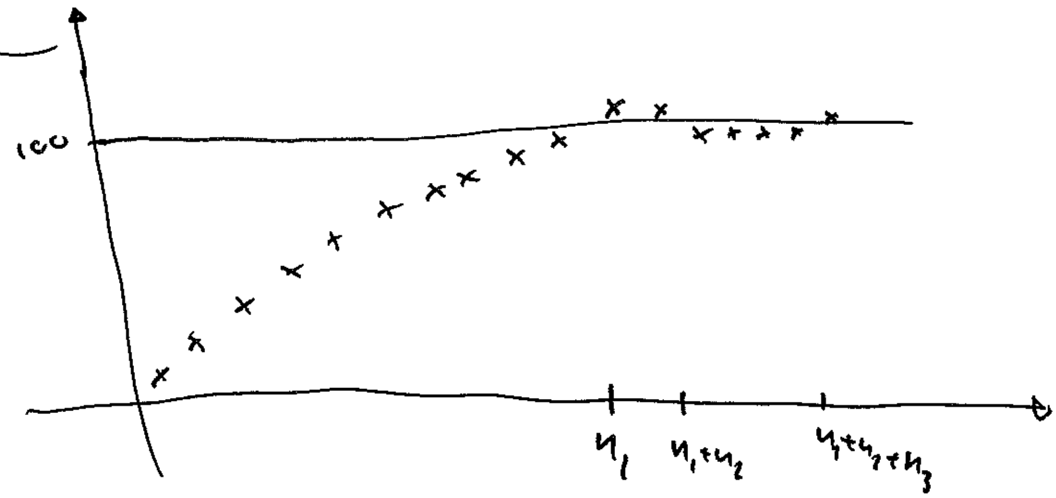
Lägg till n_3 positiva så att vi kommer över 100 igen

$$\sum_{j=1}^{n_1} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{-1}{2j} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_3} \frac{1}{2j-1} > 100$$

Och nu negativa

$$\sum_{1}^{n_1} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=1}^{n_2} -\frac{1}{2j} + \sum_{n_1+1}^{n_1+n_3} \frac{1}{2j-1} + \sum_{j=n_2+1}^{n_2+n_4} \frac{-1}{2j} < 100 \dots$$

~~Observera att~~



Sats (Integral test): Om $f(x) \geq 0$ och avtagande och om $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent

då är $\sum_{j=1}^\infty f(j)$ konvergent

Bevis: Observera att

$$\int_0^N f(x)\,dx = \sup_{e \leq f} \sum_{j=1}^n a_j (x_j - x_{j-1}) \qquad e = \begin{cases} a_j & x_{j-1} \leq x < x_j \\ \text{och} & 0 = x_0 < x_1 < \dots = N \end{cases}$$

och eftersom $f \geq 0$ så kommer, för alla N

$$\int_0^\infty f(x) = \text{Tal} = M \geq \sup_{e \leq f} \sum_{j=1}^n a_j (x_j - x_{j-1}) \geq \sum_{j=1}^n f(j) \qquad \text{för alla } N.$$

~~då~~ om vi väljer $e = f(j)$ för $j-1 \leq x < j$.

Så $\sum_{j=1}^n f(j) \leq M$ är en växande följd $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f(j)$.

existerar. $\square$

Nästa från satsen utnyttjar att $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j$ konvergerar för $|\lambda|<1$

för att hitta kriterier för att allmänna serier skall konvergera

Sats (rot testet): Antag att $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$

då konvergerar $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Om $\limsup \sqrt[n]{a_n} > 1$ så divergerar $\sum a_j$

Sats (kvot testet): Antag att $\limsup_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} < 1$

då konvergerar $\sum a_j$ ~~konvergerar~~

Om $\liminf_{j\to\infty} \frac{a_{j+1}}{a_j} > 1$ så divergerar $\sum a_j$.

För att visa detta så börjar vi med ett Lemma.

Lemma: Låt $N \in \mathbb{N}$ $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergerar om och endast om

$\sum_{j=N}^{\infty} a_j$ konvergerar

Bevis: Enkelt. $A = \sum_{j=1}^{N-1} a_j$ då är för $n > N$

$$t_n = \sum_{j=1}^{n} a_j = A + \underbrace{\sum_{j=N}^{n} a_j}_{s_n} = A + s_n$$

så $\lim_{n\to\infty} t_n$ existerar implicerar att

$\lim_{n\to\infty} A + s_n$ existerar $\Rightarrow \lim s_n = \lim (s_n + A - A)$ existerar

Bevis (Rot test): Eftersom $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda < 1$

så existerar det ett N så att

$$\sqrt[n]{a_n} < \frac{\lambda+1}{2} = \mu \quad \text{för alla} \quad n > N,$$

dvs $a_n < \mu^n$ för $\mu < 1$.

Men $\sum_{N=1}^{\infty} \mu^n$ är en geometrisk serie och konvergerar

därför. Så $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ konvergerar enl. jämförelsekriteriet.

$\boxed{\Sigma}$

En tillämpning.

> **Sats:** Låt $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$. ~~....~~ Då existerar det ett R så att $\sum_{j=1}^{\infty} c_j x^j$ konvergerar för $|x| < R$.
>
> Vidare så
>
> $$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n}} \qquad \left(\text{eller } \infty \text{ om } \sqrt[n]{c_n} \to 0\right).$$

Bevis: Om $|x| < R$ så kan vi

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n x^n} < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n R^n} = \limsup_{n\to\infty} R\sqrt[n]{c_n} = 1.$$

Så $\sum_{j=1}^{\infty} c_j x^j$ konvergerar enl. rot testet.