SF1624 Algebra och geometri

Föreläsning 3

Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH

4 november 2016

Dagens ämne:

Kryssprodukt (a.k.a. vektorprodukt), kapitel 1.5 i boken

- Definition
- Egenskaper
- Användning
- Mer om linjer och plan
- Areor och volymer

Kryssprodukt finns bara i $\mathbf{R}^3$:

Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ så definieras kryssprodukten

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Exempel:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Observera (och kontrollräkna i exemplet ovan) att vektorn $\vec{x} \times \vec{y}$ är ortogonal mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$.

Kryssproduktens egenskaper:

Kryssprodukten $\vec{x} \times \vec{y}$ är en **vektor** och uppfyller för alla $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{R}^3$ och $t \in \mathbf{R}$:

1. $\vec{x} \times \vec{y}$ är ortogonal mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$
2. $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \sin\theta$ där θ är vinkeln mellan dem
3. $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x} \times \vec{y}$ bildar ett högerorienterat system
4. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$
5. $\vec{x} \times \vec{x} = \vec{0}$
6. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}$
7. $(t\vec{x}) \times \vec{y} = t(\vec{x} \times \vec{y})$

(Men generellt är $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) \neq (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$)

Kryssprodukt

Vid användning av kryssprodukt är detta det centrala:

Kryssprodukten $\vec{x} \times \vec{y}$

1. är en **vektor**
2. är **ortogonal** mot både $\vec{x}$ och $\vec{y}$
3. har **längden** $||\vec{x}||||\vec{y}|| \sin\theta$

Kryssprodukt

Tillämpningar på area och volym:

1. Vektorerna $\vec{x}$ och $\vec{y}$ i $\mathbf{R}^3$ spänner upp en parallellogram med area $\|\vec{x} \times \vec{y}\|$

2. Vektorerna $\vec{x}$, $\vec{y}$ och $\vec{z}$ i $\mathbf{R}^3$ spänner upp en parallellepiped med volym $|\vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})|$

Övningsprov på kryssprodukt

Lös dessa uppgifter:

1. Bestäm en ekvation för det plan i $\mathbf{R}^3$ som innehåller punkterna $P(1,0,0)$, $Q(1,1,1)$ och $R(2,3,4)$.
2. Låt linjen L ges av parameterframställningen $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm en ekvation för det plan genom origo som innehåller linjen L.
3. Låt planet Π_1 ges av ekvationen $x + y + z = 1$ och planet Π_2 av $x - 2y + 3z = 1$. Finn en parameterframställning för skärningslinjen mellan planen.