# SF1624 Algebra och geometri

## Föreläsning 1


Lars Filipsson

Institutionen för matematik
KTH


31 oktober 2016

# Kurstart för Algebra och geometri

**Välkomen till kursen SF1624 Algebra och geometri, CELTE och CMETE och COPEN!**

Lars Filipsson, kursansvarig
LFN@KTH.SE

Idag ska vi se hur kursen funkar samt börja jobba.

Första uppgiften i kursen: **vektorer**

**Administrativt för SF1624 Algebra och geometri:**

- Info på Kurswebben i KTH Social
- Filmer i Scalable learning
- Registrera dig på kursen (nu!)
- Anmäl dig till tentamen (senare)

# Kursens upplägg

**Läs på kurswebben för SF1624 i KTH Social:**

- Kursregistrering
- Seminarier (hitta din resultatsida)
- Kurslitteratur och kursinnehåll
- Elektro Media Open

# Kursens upplägg

**Så här jobbar ni med kursen:**

- Före föreläsning: ni ser film och läser i boken
- På föreläsning: genomgångar och uppgifter
- Efter föreläsning: ni läser och löser uppgifter
- På övning: arbete med uppgifter ur boken
- Efter övning: ni läser och löser uppgifter
- Före seminarium: ni löser uppgifter
- På seminarium: inl./prov, problemlösning, presentation

# Kursens upplägg

**Vad handlar den här kursen om? Linjär algebra:**

- Vektorer, Matriser, Determinanter
- Geometri med linjer och plan
- Linjära ekvationssystem
- Linjära avbildningar mellan vektorrum
- Egenvärden och egenvektorer, diagonalisering

# Att göra denna vecka

## Översikt över modul 1

- Idag: Vektorer (kap 1.1-1.2)
  - Räkna med vektorer i $\mathbf{R}^n$
  - Linjens ekvation på vektorform/parameterform
  - Längden av en vektor
  - Enhetsvektorer
- På onsdag: Skalärprodukt av vektorer (kap 1.3-1.4)
  - Definition och egenskaper
  - Projektioner
  - Planets ekvation
  - Minsta avstånd
- På fredag: Kryssprodukt av vektorer
  - Definition och egenskaper
  - Volymer mm

**Vektorer** i $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, och $\mathbf{R}^n$.

- Räkning med vektorer
  - addition
  - subtraktion
  - multiplikation med skalär
- Längden av en vektor, enhetsvektorer
- Linjens ekvation på vektorform/parameterform
- Standardbasen
- Linjärkombinationer av vektorer

**Vardagsexempel:**

1. Artilia, Bertilia och Certilia drar i en kälke.
   A. Vad händer med kälken?
   B. Hur ska Certil dra för att det ska bli jämvikt?
2. Dertil åker eclipse på Gröna Lund. Hur ska tyngdkraften beskrivas?

# Vektorer i $\mathbf{R}^2$

$\mathbf{R}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1, \, x_2 \in \mathbf{R} \right\}$. Vektorbeteckning: $\vec{x}$

Vektorerna i $\mathbf{R}^2$ kan adderas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}$$

och multipliceras med reella tal (skalärer):

$$t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \end{bmatrix}$$

Längden (normen) av en vektor ges av

$$\left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

**Uppgift.**

Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

A. Beräkna $\vec{u} + \vec{v}$. Rita även figur!
B. Beräkna $\vec{u} - \vec{v}$. Rita även figur!
C. Beräkna $2\vec{u}$. Rita även figur!
D. Beräkna $-\vec{v}$. Rita även figur!
E. Beräkna $\|\vec{u}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med $\vec{u}$
F. Beräkna $\|\vec{v}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med $\vec{v}$

# Linjer i $\mathbf{R}^2$

Vi kan beskriva linjer i planet med vektorer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

är vektorformen/parameterformen för den linje som går genom punkten $P(1, -3)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ skriver vi också

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbf{R}$$

(I envarre hade vi skrivit $x_2 = 2x_1 - 5$ för denna linje)

**Uppgifter.**

1. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkten $P(0,-1)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Avgör om punkten $Q(5,9)$ ligger på linjen! Rita figur!

2. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkterna $P(3,-1)$ och $Q(-1,1)$. Rita figur!

# Vektorer i $\mathbf{R}^3$

$$\mathbf{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbf{R} \right\}$$

Vektorerna i $\mathbf{R}^3$ kan adderas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{bmatrix}$$

och multipliceras med reella tal (skalärer):

$$t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ tx_3 \end{bmatrix}$$

Längden (normen) av vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ ges av $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

# Liten övning

**Uppgift.**

Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

A. Beräkna $\vec{u} + \vec{v}$ och $\vec{u} - \vec{v}$. Rita nån sorts figur!
B. Beräkna $-\vec{v}$. Rita nån sorts figur!
C. Beräkna $\|\vec{u}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med $\vec{u}$
D. Beräkna $\|\vec{v}\|$ och bestäm en enhetsvektor parallell med $\vec{v}$

# Linjer i $\mathbf{R}^3$

Vi kan beskriva linjer i rymden med vektorer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbf{R}$$

är vektorformen/parameterformen för den linje som går genom punkten $P(1, -3, 2)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Om $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ skriver vi också

$$\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbf{R}$$

($x_3 = 2x_1 - x_2 - 5$ är INTE ekvationen för en linje! Vad är det?)

**Uppgifter.**

1. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkten $P(0, -1, 3)$ och är parallell med vektorn $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Avgör om punkten $Q(5, 8, 3)$ ligger på linjen!

2. Finn en ekvation på vektorform/parameterform för den räta linje som går genom punkterna $P(3, -1, 0)$ och $Q(-1, 1, 2)$. Rita figur! Kan man göra på mer än ett sätt?

# Vektorer i $\mathbf{R}^n$

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

Vektorerna i $\mathbf{R}^3$ kan adderas och multipliceras med skalärer:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad t \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} tx_1 \\ tx_2 \\ \vdots \\ tx_n \end{bmatrix}$$

Normen av vektorn $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ är $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

# Vektorrumsaxiomen

Följande regler gäller för alla $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{R}^n$ och $s, t \in \mathbf{R}$

1. $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{R}^n$
2. $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
3. $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
4. $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$
5. $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$
6. $t\vec{x} \in \mathbf{R}^n$
7. $s(t\vec{x}) = (st)\vec{x}$
8. $(s + t)\vec{x} = s\vec{x} + t\vec{x}$
9. $t(\vec{x} + \vec{y}) = t\vec{x} + t\vec{y}$
10. $1\vec{x} = \vec{x}$

Se sats 1 sid 15 i boken.

# Delrum

En icke-tom delmängd $S$ av $\mathbf{R}^n$ sägs vara ett **delrum** till $\mathbf{R}^n$ om för alla vektorer $\vec{x}, \vec{y} \in S$ och skalärer $t \in \mathbf{R}$ gäller

1. $\vec{x} + \vec{y} \in S$
2. $t\vec{x} \in S$

$\{\vec{0}\}$ kallas det triviala delrummet.

# Span

En given mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ **spänner upp** ett delrum $S$ till $\mathbf{R}^n$ genom

$$S = \{t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k : t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}\}$$

Dvs $S$ är alla tänkbara linjärkombinationer av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$.

Vi skriver $S = \mathrm{Span}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$

# Linjärt beroende/oberoende

En given mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ sägs vara linjärt oberoende om ingen av dem kan skrivas som en linjärkombination av de övriga.

Ett annat sätt att säga samma sak:

**Definition.** En mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ sägs vara **linjärt oberoende** om ekvationen

$$t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

bara har den triviala lösningen $t_1 = t_2 = \cdots = t_k = 0$. Finns det någon icke-trivial lösning till ekvationen sägs mängden vektorer vara **linjärt beroende.**

# Bas för delrum

Om en mängd $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ av vektorer i $\mathbf{R}^n$ **spänner upp** ett delrum $S$ till $\mathbf{R}^n$ och dessutom är **linjärt oberoende** så sägs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ vara en **bas** för $S$.

Obs standardbasen för $\mathbf{R}^n$ är $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$

**Linje i $\mathbf{R}^n$.** Om $\vec{p}, \vec{v} \in \mathbf{R}^n$ med $\vec{v} \neq \vec{0}$ så sägs mängden av punkter $\vec{x}$ som uppfyller vektorekvationen $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$, $t \in \mathbf{R}$, vara en **linje** genom $\vec{p}$.

**Plan i $\mathbf{R}^n$.** Om $\vec{p}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbf{R}^n$ med $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ en linjärt oberoende mängd, så sägs mängden av punkter $\vec{x}$ som uppfyller vektorekvationen $\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2$, $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$, vara ett **plan** genom $\vec{p}$.

**Hyperplan i $\mathbf{R}^n$.** Om $\vec{p}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1} \in \mathbf{R}^n$ med $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{n-1}\}$ en linjärt oberoende mängd, så sägs mängden av punkter $\vec{x}$ som uppfyller vektorekvationen $\vec{x} = \vec{p} + t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \cdots + t_{n-1}\vec{v}_{n-1}$, $t_1, \ldots t_{n-1} \in \mathbf{R}$, vara ett **hyperplan** genom $\vec{p}$.

# Läxa

**Liten läxa till nästa gång:**

1. Se film om skalärprodukt på scalable
2. Titta på och tänk igenom figuren på sid 29 i boken
3. Träna på räkning med vektorer och linjer i $\mathbf{R}^2$ och $\mathbf{R}^3$
4. En båt som i stillastående vatten går med 6 m/s kommer in i en älv där vattnet rör sig med 2 m/s rakt söderut.
   A. Bestäm båtens hastighet om den styrs i rakt östlig riktning!
   B. Vilken kurs ska båten ges för att röra sig rakt österut?