KTH Teknikvetenskap

SF1626 Flervariabelanalys
Lösningsförslag till tentamen 2016-06-07

DEL A

1. Låt S vara ellipsoiden som ges av ekvationen $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$.
   (a) Bestäm en normalvektor till S i en punkt (x_0, y_0, z_0) på S. **(2 p)**
   (b) Bestäm de värden på konstanten d för vilka planet $x + 2y + 6z = d$ är ett tangentplan till S. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) Eftersom ytan är en nivåyta för funktionen $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ ges en normalvektor av gradienten, dvs $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0, 4y_0, 6z_0)$.

(b) För att $x + 2y + 6z = d$ ska vara ett tangentplan måste ∇f vara parallell med $(1, 2, 6)$ i dessa punkter, dvs $(2x_0, 4y_0, 6z_0) = (t, 2t, 6t)$ för något t. Detta ger $(x_0, y_0, z_0) = t(1/2, 1/2, 1)$ och när vi sätter in det i ekvationen får vi

$$\frac{t^2}{4} + 2\frac{t^2}{4} + 3t^2 = 5$$

dvs $15t^2 = 20$ och $t = \pm 2/\sqrt{3}$. Detta ger

$$d = x_0 + 2y_0 + 6z_0 = t/2 + t + 6t = \frac{15}{2}t = \pm 5\sqrt{3}.$$

Svar.

(a) $(2x_0, 4y_0, 6z_0)$ är en normalvektor till ellipsoiden i punkten (x_0, y_0, z_0).

(b) $d = \pm 5\sqrt{3}$.

2. Låt $\mathbf{F}$ vara vektorfältet $\mathbf{F}(x, y, z) = (y+2z, x+3z, 2x+3y)$ och låt C vara den räta linjen från $(1, 1, 1)$ till $(3, 3, 3)$.
   (a) Beräkna kurvintegralen $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ genom att använda en parametrisering av kurvan C. **(2 p)**
   (b) Visa att $\mathbf{F}$ är konservativt och beräkna samma kurvintegral med hjälp av en potential. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a) En parametrisering av kurvan ges av $\mathbf{r}(t) = (t, t, t)$ på intervallet $1 \leq t \leq 3$. Då får vi $\mathbf{r}'(t) = (1, 1, 1)$ och kurvintegralen blir

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_1^3 (3t, 4t, 5t) \cdot (1, 1, 1)\, dt = \int_1^3 12t\, dt \\ &= \left[6t^2\right]_1^3 = 6 \cdot (3^2 - 1^2) = 6 \cdot 8 = 48.\end{aligned}$$

(b) För att bestämma en potential integrerar vi först första komponenten i x-led och får $\Phi(x, y, z) = xy + 2xz + g(y, z)$. När vi deriverar detta med avseende på y får vi $x + \frac{\partial g}{\partial y} = x + 3z$ och därmed $g(y, z) = 3yz + h(z)$. Till slut ger derivering med avseende på z att $2x + 3y + h'(z) = 2x + 3y$ och vi kan välja $h(z) = 0$. Därmed är $\Phi(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$ en potential till $\mathbf{F}$ och vektorfältet är konservativt.
Vi kan nu beräkna kurvintegralen som

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \Phi(3, 3, 3) - \Phi(1, 1, 1) \\ &= (9 + 18 + 27) - (1 + 2 + 3) \\ &= 54 - 6 = 48.\end{aligned}$$

Svar.

(a) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 48$.
(b) $\Phi(x, y, z) = xy + 2xz + 3yz$ är en potential till $\mathbf{F}$.

3. Låt $f(x, y) = \sqrt{\cos(y) + \ln(1 + x)}$ för de x och y där detta uttryck är väldefinierat. Bestäm konstanterna a, b och c så att

$$f(x, y) = a + bx + cy + O(x^2 + y^2).$$

Detta betyder att det finns en konstant M sådan att

$$|f(x, y) - (a + bx + cy)| \leq M(x^2 + y^2)$$

för alla punkter (x, y) i en omgivning av origo. **(4 p)**

Lösningsförslag. Polynomet $a + bx + cy$ måste vara Taylorpolynomet av grad ett till funktionen kring origo för att villkoret ska vara uppfyllt. Vi beräknar värdet i origo som $f(0, 0) = \sqrt{\cos(0) + \ln(1 + 0)} = \sqrt{1} = 1$. Alltså ska $a = 1$. Vidare ska b vara partiella derivatan med avseende på x i origo och vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(y) + \ln(1 + x)}} \cdot \frac{1}{1 + x}$$

och

$$b = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(0) + \ln(1 + 0)}} \cdot \frac{1}{1 + 0} = \frac{1}{2}.$$

Till sist får vi

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{\cos(y) + \ln(1 + x)}} \cdot (-\sin(y))$$

och

$$c = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\cos(0) + \ln(1 + 0)}} \cdot (-\sin(0)) = 0.$$

Svar. Konstanterna ges av $a = 1$, $b = 1/2$ och $c = 0$.

DEL B

4. En partikel färdas i en bana som beskrivs av parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos \pi t + \sin \pi t, \cos \pi t - \sin \pi t, \pi t), \qquad 0 \leq t \leq 4.$$

(a) Beräkna partikelns hastighet, $\mathbf{r}'(t)$, och acceleration, $\mathbf{r}''(t)$. **(1 p)**

(b) Visa att hastigheten och accelerationen är vinkelräta mot varandra. **(1 p)**

(c) Beräkna sträckan som partikeln har färdats under intervallet $0 \leq t \leq 4$. **(2 p)**

Lösningsförslag.

(a)

$$\mathbf{r}'(t) = (-\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t, -\pi \sin \pi t - \pi \cos \pi t, \pi)$$

och

$$\mathbf{r}''(t) = (-\pi^2 \cos \pi t - \pi^2 \sin \pi t, -\pi^2 \cos \pi t + \pi^2 \sin \pi t, 0).$$

(b) Genom att beräkna skalärprodukten $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$ kan vi se att de är vinkelräta.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) &= -\pi^3(\cos \pi t - \sin \pi t)(\cos \pi t + \sin \pi t) \\ &\qquad +\pi^3(\cos \pi t + \sin \pi t)(\cos \pi t - \sin \pi t) + \pi \cdot 0 = 0,\end{aligned}$$

vilket visar att de är vinkelräta.

(c) Farten hos partikeln ges av $|\mathbf{r}'(t)|$ och vi får detta som

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}'(t)| &= \sqrt{(-\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t)^2 + (-\pi \sin \pi t - \pi \cos \pi t)^2 + \pi^2} \\ &= \sqrt{2\pi^2(\sin^2 \pi t + \cos^2 \pi t) + \pi^2} = \pi\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Därmed kan vi beräkna sträckan som partikeln färdats som

$$\int_0^4 |\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^4 \pi\sqrt{3}\, dt = 4\pi\sqrt{3}.$$

Svar.

(a) Hastigheten är $\mathbf{r}'(t) = (-\pi \sin \pi t + \pi \cos \pi t, -\pi \sin \pi t - \pi \cos \pi t, \pi)$ och accelerationen $\mathbf{r}''(t) = (-\pi^2 \cos \pi t - \pi^2 \sin \pi t, -\pi^2 \cos \pi t + \pi^2 \sin \pi t, 0)$.

(c) Sträckan är $4\pi\sqrt{3}$.

5. Området D i planet ges av

$$(x^2 + y^2 - x)^2 \leq x^2 + y^2$$

villket i polära koordinater motsvaras av olikheten $r \leq 1 + \cos\theta$. Bestäm koordinaterna till masscentret av området D om dess densitet är konstant. **(4 p)**

Lösningsförslag. För att beräkna masscentrum behöver vi beräkna arean A och de båda integralerna $I_x = \iint_D x\,dxdy$ och $I_y = \iint_D y\,dxdy$.

Arean ges av

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{1+\cos\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{2}(2\pi + 0 + \pi) = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

För I_x får vi

$$\begin{aligned} I_x &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r\cos\theta\, r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1+\cos\theta} \cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^3 \cos\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + \cos^4\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos\theta + 3\cos^2\theta + 3\cos^3\theta + (1-\sin^2\theta)\cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(\cos\theta + 4\cos^2\theta + 3\cos^3\theta - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta\right)\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\left(0 + 4\pi + 0 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5\pi}{4}. \\ I_y &= \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r\sin\theta\, r dr d\phi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{1+\cos\theta} \sin\theta\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^3 \sin\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\left[-\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}\right]_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Vi får nu x-koordinaten för masscentrum som $I_x/A = (5\pi/4)/(3\pi/2) = 5/6$ och y-koordinaten som $I_y/A = 0$.

Svar. Masscentrum ligger i punkten $(5/6, 0)$.

6. Vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ är definierat i rummet och uppfyller $\mathbf{div}\,\mathbf{F} = x^2 + y^2 + z^2$. Vi känner dessutom till att

$$F_3(x, y, z) = y^2 + xz.$$

Ytan S är övre halvan av enhetssfären som beskrivs av $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, och dess orientering ges av att normalvektorn $\mathbf{N} = (x, y, z)$ har positiv riktning. Beräkna flödet av $\mathbf{F}$ genom S. **(4 p)**

Lösningsförslag. I och med att vi känner till divergensen överallt kan vi använda divergenssatsen för att beräkna flödet ut genom den slutna yta som utgör randen till halvklotet H som ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ och $z \geq 0$. Detta flöde blir enligt divergenssatsen

$$\begin{aligned}
\iiint_H (x^2 + y^2 + z^2)\,dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^4\,dr \int_0^{\pi/2} \sin\phi\,d\phi \\
&= [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \cdot [-\cos\phi]_0^{\pi/2} \\
&= 2\pi \cdot \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{2\pi}{5}
\end{aligned}$$

För att få reda på flödet ut genom den buktiga delen av ytan behöver vi dra bort flödet ut genom bottenytan. Där har vi en normalvektor $(0, 0, -1)$ vilket ger ett flöde

$$\iint_D -(y^2 + xz)\,dxdy$$

där D är enhetscirkeln i xy-planet. I och med att $z = 0$ där har vi flödet

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^2 \sin^2\theta\, r dr d\theta = -\frac{\pi}{4}.$$

Flödet genom den buktiga ytan blir därmed

$$\frac{2\pi}{5} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{13\pi}{20}.$$

Svar. Flödet genom ytan blir $13\pi/20$.

DEL C

7. Låt $f(x, y, z)$ vara en två gånger kontinuerligt deriverbar funktion av variablerna x, y och z som endast beror på avståndet från origo. Det vill säga $f(x, y, z) = g(r)$ för någon två gånger deriverbar funktion $g(r)$, där $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   Laplaceoperatorn ∇^2 definieras av att

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

   Beräkna $\nabla^2 f$ uttryckt i r, funktionen $g(r)$ och dess derivator, för $r > 0$. **(4 p)**

Lösningsförslag. Enligt kedjeregeln får vi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = g'(r)\frac{\partial r}{\partial x}$$

och

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g''(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + g'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Eftersom $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ får vi

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

och

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1 \cdot r - x \cdot \frac{x}{r}}{r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

På grund av symmetrin får vi motsvarande för y och z. Därmed har vi

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
&= g''(r)\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right) + g'(r)\left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3}\right) \\
&= g''(r) + g'(r)\frac{3r^2 - r^2}{r^3} = g''(r) + \frac{2}{r}g'(r).
\end{aligned}$$

Svar. $\nabla^2 f = g''(r) + 2g'(r)/r$ för $r > 0$.

8. Visa att ekvationen $4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2) = 1$ endast har lösningen $(x, y) = (0, 0)$.
(4 p)

Lösningsförslag. Vi kan visa att det bara finns en lösning genom att visa att vänsterledet är större än 1 i alla andra punkter. För att visa det ser vi på möjliga lokala extrempunkter. I och med att funktionen är deriverbar överallt måste en lokal extrempunkt uppfylla att gradienten av vänsterledet är nollvektorn. Låt $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2 + \cos(2x^2 + y^2)$. Vi får då att

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \big(8x - 4x\sin(2x^2+y^2),\, 6y - 2y\sin(2x^2+y^2)\big) \\ &= \big(4x(2-\sin(2x^2+y^2)),\, 2y(3-\sin(2x^2+y^2))\big) \end{aligned}$$

I och med att sinus aldrig kan anta värdena 2 eller 3 finns bara en kritisk punkt och detta är origo. Utanför ellipsen med ekvation $4x^2 + 3y^2 = 3$ tar funktionen bara värden större än eller lika med två. Eftersom origo är den enda kritiska punkten innanför denna ellips måste funktionen vara större än 1 i alla punkter utanför origo.

9. Låt $u(x, y)$ vara en *harmonisk funktion*, d.v.s. en funktion som uppfyller

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \text{för alla } x, y.$$

(a) Ange en kurvintegral som beräknar medelvärdet $v(r)$ av $u(x, y)$ över alla punkter (x, y) som ligger på en cirkel med radie r kring origo. **(1 p)**

(b) Det går att beräkna derivatan $v'(r)$ genom att derivera innanför integraltecknet. Visa att $v(r)$ är en konstant funktion genom att använda divergenssatsen på kurvintegralen för $v'(r)$. **(2 p)**

(c) Använd detta till att visa att $v(r) = u(0, 0)$ för alla $r > 0$. **(1 p)**

Lösningsförslag.

(a) Vi ska beräkna medelvärdet över en cirkel med radie r kring origo och får då

$$v(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, d\theta.$$

(b) Vi deriverar $v(r)$ och får då

$$\begin{aligned} v'(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right) d\theta. \\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\right) r d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{N}\, ds. \end{aligned}$$

Den sista integralen är en flödesintegral som vi kan beräkna med hjälp av divergenssatsen och får då

$$v'(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{C_r} \mathbf{grad}\, u \cdot \mathbf{N}\, ds = \frac{1}{2\pi r}\iint_{D_r} \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\, u\, ds.$$

Eftersom $\mathbf{div}\,\mathbf{grad}\, u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ger detta att $v'(r) = 0$.

(c) I och med att $v'(r) = 0$ har vi att $v(r) = C$ där C är en konstant. För att bestämma konstanten ser vi på gränsvärdet då r går mot noll. På grund av kontinuiteten har vi att medelvärdet på en cirkel med radie r måste gå mot värdet i origo när r går mot noll. Därmed är $C = u(0, 0)$ och $v(r) = u(0, 0)$ för alla $r > 0$.