November 1, 2016. Föreläsning 13.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Ortogonala matriser.
- Transpose av en matris

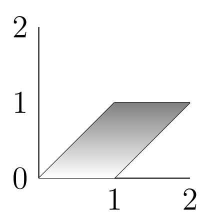
1. **Definition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.
   - f bevarar längden om $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ för alla $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^k$.
   - f bevarar ortogonalitet om $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = 0$ för alla $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^k$ så att $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.
   - f bevarar vinklar om vinkeln mellan $f(\vec{v})$ och $f(\vec{w})$ är lika med vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ för alla $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^k$.
   - f bevarar skalärprodukt om $f(\vec{v}) \cdot f(\vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{w}$ för alla $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^k$.

2. **Definition.** En linjär avbildning $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kallas för **ortogonal** om $||f(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ for alla $\vec{v}$ (den bevarar längden).

3. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning.
   - f bevarar längden om och endast om f bevarar skalärprodukt.
   - Om f bevarar längden, då bevarar f ortogonalitet och vinklar.

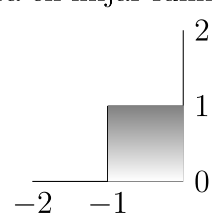
4. **Uppgift.** Låt $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ges av matrisen $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
   - Bevisa att f bevarar ortogonalitet och vinklar.
   - Bevisa att f är inte ortogonal.

5. **Uppgift.** Låt $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär funktion som avbildar enhetskvadraten på en parallellogram enligt figuren:



   - Bestäm standardmatrisen till f.
   - Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

6. **Uppgift.** Låt $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara en linjär funktion som avbildar enhetskvadraten på en parallellogram enligt figuren:



- Bestäm standardmatrisen till f.
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

7. **Uppgift.** Låt $\vec{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^3$. Antar att $||\vec{v}|| = 1$. Låt $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara rotation runt linjen span$(\vec{v})$ i α radianer.

- Bestäm standardmatrisen till f (inte bli avskräckt om du inte kan lösa det, men försök att göra det i alla fal! Vi kommer senare se hur man gör detta genom en så kallad basbyte).
- Är det sant att f bevarar längden, ortogonalitet, vinklar?

8. Låt A vara $n \times k$ matris:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix}$$

Transpose av A är $k \times n$ matris:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{C}_1^{\,T} \\ \vec{C}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{C}_n^{\,T} \end{bmatrix}$$

9. Om $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ är ortogonal då den bevarar skalär produkt, vinklar, ortogonalitet.

10. Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ortogonal och

$$A = \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\vec{e_1}) & f(\vec{e_2}) & \cdots & f(\vec{e_n}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

vara standardmatrisen till f. För att f bevarar längden och ortogonalitet, det betyder att:

- $||\vec{C}_i|| = ||f(\vec{e_i})|| = ||\vec{e_i}|| = 1$, dvs, kolonnerna till f har längden 1;
- Låt $i \neq j$. Då $\vec{C}_i \cdot \vec{C}_j = f(\vec{e_i}) \cdot f(\vec{e_j}) = \vec{e_i} \cdot \vec{e_j} = 0$, dvs kolonnerna till f är ortogonala.

Det betyder att:

$$A^T A = \begin{bmatrix} \vec{C}_1^{\,T} \\ \vec{C}_2^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{C}_n^{\,T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{C}_1\vec{C}_1 & \vec{C}_1\vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_1\vec{C}_n \\ \vec{C}_2\vec{C}_1 & \vec{C}_2\vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_2\vec{C}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{C}_n\vec{C}_1 & \vec{C}_n\vec{C}_2 & \cdots & \vec{C}_n\vec{C}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Vi har bevisad:

11. **Proposition.** Låt $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ortogonal och A vara standardmatrisen till f. Då f är inverterar och matrisen till f^{-1} ges av A^T.

12. **Proposition.** Låt $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara en linjär avbildning och A vara matrisen till f. Följande är ekvivalenta:

(1) f är ortogonal.
(2) kolonnerna till A är ortogonala och har längden 1.
(3) raderna till A är ortogonala och har längden 1.
(4) A är inverterbar och A^T är inversen till A.

13. **Proposition.** Låt $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vara ortogonala linjär avbildningar.

(1) f^{-1} är ortogonal
(2) $f \circ g$ är ortogonal

14. **Uppgift.** Bestäm inversen till följande matris:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

15. **Uppgift.** Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^3$. Antar att $||\vec{v}|| = 1$ och $\dim(\text{spam}(\vec{v}, \vec{w})) = 2$. Låt $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara rotation runt linjen $\text{span}(\vec{v})$ i α radianer och $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling om planet $\text{spam}(\vec{v}, \vec{w})$. Vad kan du säga om kolonnerna av standardmatriserna till f, g, fg och gf?