F12

Några följdsatser.

<u>Följdsats 1</u>: f kont på $[a,b]$ och begränsad

$\Rightarrow f$ Riemann integrerbar.

<u>Följdsats 2</u>: f växande och begränsad på $[a,b]$

$\Rightarrow f$ integrerbar.

<u>Bevis</u>: Antag att $|f(x)| \leq M$.

~~Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vara~~

Betrakta $D_k = \{ x \in [a,b] \,;\, \operatorname{osc}_x f \geq \frac{1}{k} \}$

Om $x_0 \in D_k$ då måste

$$\frac{1}{k} + \underbrace{\lim_{x \to x_0^-} f(x)}_{f(x_0^-)} \leq \underbrace{\lim_{x \to x_0^+} f(x)}_{f(x_0^+)}$$

Då är, om $x_j \in D_k$.

$$-M \leq f(a^-) \leq f(x_1^+) - \frac{1}{k} \leq f(x_2^+) - \frac{2}{k} \ldots \leq f(x_n^+) - \frac{n}{k} \leq M - \frac{n}{k}$$

$\Rightarrow \quad n \leq 2kM$

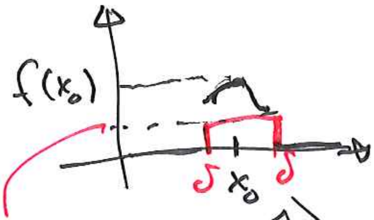
så $|D_k| \leq 2kM \quad \Rightarrow D_k$ noll mängd.

Men $D = \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k$ så D är en nollmängd

$\Rightarrow f$ integrerbar.

Följdsats: $\int_a^b f(x)\,dx$ och $f \geq 0 \Rightarrow f(x) = 0$ a.e.

Bevis (idé):



$\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2}$

i ε-δ def

f integrerbar $\Rightarrow$

f kontinuerlig a.e.

och om $f(x_0) > 0$ och

f är kont. i x_0

så

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 2\varepsilon\delta = f(x_0)\,\delta > 0.$$

Motsägelse...

Följdsats: f integrerbar på $[a,b]$

och $\psi : [c,d] \longmapsto [a,b]$ homeomorphism

Och $|\psi^{-1}(x) - \psi^{-1}(y)| \leq K\,|x-y|$

då är $g = f \circ \psi$ integrerbar på $[c,d]$.

Bevis: g kont i y om f kont i $\psi(y)$.

D.v.s g diskont. endast i de punkter $\psi^{-1}(x)$ där f diskontinuerlig i x.

f integrerbar $\Rightarrow$ $D(f) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j)$

$\sum_{j=1}^{\infty} b_j - a_j < \varepsilon$.

Men det innebär att ~~g är~~ $D(g) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \psi^{-1}(a_j, b_j)$

och $\psi^{-1}(a_j, b_j) = \left\{ \begin{matrix} \text{öppet} \\ \text{intervall} \\ \text{då } \psi \text{ homeomorfi} \end{matrix} \right\} = (\alpha_j, \beta_j)$

där $(\beta_j - \alpha_j) \leq |\psi^{-1}(a_j) - \psi^{-1}(b_j)| \leq K(a_j, b_j)$

så $D(g) \in \bigcup (\alpha_j, \beta_j)$ och

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\beta_j - \alpha_j) \leq K \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < K\varepsilon.$$

$\blacksquare$

Analysens huvudsats: Antag att f är integrerbar på (a,b) och $x_0 \in (a,b)$.

Vidare antag att f är kontinuerlig i x_0.

Då kommer

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x). \quad \text{i punkten } x_0.$$

Kommentar: Observera att den här satsen är mer generell än envariabeln där vi antog att f var kontinuerlig i en hel omgivning av x_0.

Bevis: Vill visa att $(*)$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0 \quad |h|<\delta \Rightarrow \underbrace{\left|\frac{1}{h}\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{1}{h}\int_a^{x_0} f(t)\,dt - f(x_0)\right| < \varepsilon.}_{f(x_0)-\varepsilon < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) < f(x_0)+\varepsilon}$$

Vi antar att

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \hat{\delta}>0, \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow -\varepsilon < f(x)-f(x_0) < \varepsilon$$

dvs, om $h = x_0 - x$

$$\& \quad |h|<\hat{\delta} \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon \quad (1)$$

integrera båda sidor i (1) från x till x_0 och dela med h

$$|h|<\hat{\delta} \quad \underbrace{\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) - \varepsilon h\right)} < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt < \frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dt + \varepsilon\right)$$

$$|h|<\hat{\delta} \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt < f(x_0)+\varepsilon,$$ så $\delta=\hat{\delta}$ och $(*)$ gäller ∎

Följdsats Om f är Riemann integrerbar ~~och~~ på $[a,b]$

och $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Då är $F(x)$ deriverbar nästan överallt (a.e., dvs inte på en nollmängd D men överallt annars) Och $x \notin D \Rightarrow F'(x) = f(x)$.

Bevis: f integrerbar $\Rightarrow$ f kontinuerlig a.e.

$\Rightarrow F'(x) = f(x)$.

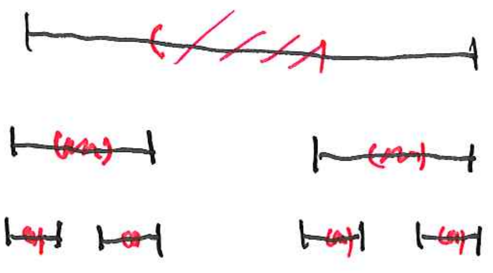
$\blacksquare$

Nu blir man sugen att om $f'(t)$ är Riemannintegrerbar så kommer

$$\int_a^x f'(t)\,dt = f(x) - f(a)$$

FEL

Exempel: Låt C vara Cantor mängden $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$



C_1, ~~tot~~ längd $\frac{2}{3}$

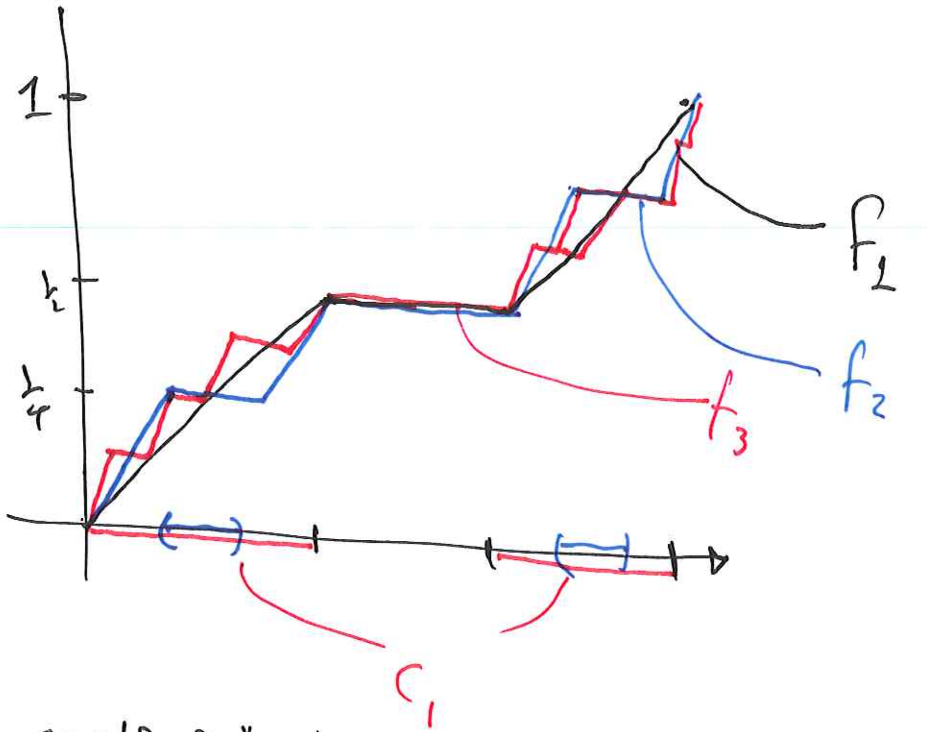
C_2 $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

C_3 $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

Givet ett $\varepsilon > 0$ så kan vi hitta ett $k > 0$ så att vi kan täcka C_k med öppna intervall av längd $< \varepsilon$, dvs täcka $C = \bigcap C_k$ med längd $< \varepsilon$

$\implies$ Cantor mängden ~~K~~ är en noll mängd

Definiera funktionerna



$\sup|f_1 - f_2| = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12} < \frac{1}{4}$

$\sup|f_2 - f_3| < \frac{1}{8}$

$\sup|f_{k+1} - f_k| < \frac{1}{2^{k+1}}$

så $f_k \to f$. Där f är konstant på varje intervall $K \subset \mathbb{R}\setminus C$ där K är sammanhängande.

Så $f'(x) = 0$ på alla sådana K.

Så $f'(x) = 0$ a.e och $f'(x)$ är odefinierad på en nollmängd, C. Vidare, bevis senare i kursen, så är f kontinuerlig.

Man är sugen att

$$\int_a^x \underbrace{f'(t)\,dt}_{=0 \text{ a.e.}} = f(x) - f(a)$$ men det är inte sant!

Integralen är inte definierad då f' är ∞ på C.

<u>Slutsats:</u> Om $f' = 0$ a.e. för en funktion så medför inte det att f är konstant, inte ens om f är kontinuerlig.

<u>Sats:</u> ~~F kont~~ $F(x)$ har kontinuerlig derivata $F' = f$ på $[a,b]$, F kont på $[a,b]$

$$\Rightarrow \quad -F(a) + F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

<u>Bevis:</u> $F(x) - \int_a^x f(t)\,dt = G(x)$ uppfyller $G'(x) = 0$

enl. analysens huvudsats så, ~~me~~

$G(x) = \text{konstant} = G(a) = F(a) - \int_a^a$ enl. medelvärdessatsen

så $F(x) - \int_a^x f(t)\,dt = F(a)$.

$\blacksquare$