Sats (Taylors Sats) Anteg att $f(x)$ är definierad på (a,b) och att f har r kontinuerliga derivator ~~av~~ i en omgivning av x_0

inte i Pagh

Låt $p(x) = \sum_{j=0}^{r} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!} (x-x_0)^j$ då kommer

a) Om $R(h) = f(x_0+h) - p(x_0+h)$ så

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(h)}{h^r} = 0$$

b) p är det enda polynomet av grad $\leq r$ med den egenskapen.

c) Om f har $r+1$ derivator i (en omgivning av) x_0

Så $R(h) = \frac{f^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} h^{r+1}$ för något $\theta(h)$

mellan h och 0.

Bevis:

a) $R(h) = R(h) - \underset{= R(0)}{0} = \begin{Bmatrix}\text{medelvärdes}\\ \text{satsen}\end{Bmatrix} = R'(\theta_1)h = (R'(\theta_1) - R'(0))h \leq$

$\leq \begin{Bmatrix}\text{medelv.}\\ \text{satsen}\end{Bmatrix} \leq R''(\theta_2)\theta_1 h \leq \dots \leq R^{(r)}(\theta_r)\theta_{r-1}\theta_{r-2}\cdots\theta_1 h$

där $0 < \theta_r < \theta_{r-1} < \dots < \theta_1 < h$. $\Rightarrow$

$\left|\frac{R(h)}{h^r}\right| \leq |R^{(r)}(\theta_r)| \to 0$ då $h \to 0$ eftersom

$\theta_r \to 0$ då $h \to 0$ enl. (1).

b) Låt p och q vara polynom av grad $\leq r$ som uppfyller villkoren då kommer

$$0 \leftarrow \frac{R_q - R_p}{h^r} = (f - q) - (f - p) = \frac{p - q}{h^r}$$

Men om $\frac{p(h) - q(h)}{h^r} \to 0$ så måste $p = q$.

c) Ett fördamat trick!

Definiera $g(t) = f(x_0+t) - p(t) - \frac{R(h)}{h^{r+1}} t^{r+1} = R(t) - \frac{R(h)}{h^{r+1}} t^{r+1}$

så $g(0) = g(h) = 0$. $\Rightarrow \exists t_1$ så $g'(t_1) = 0$, $0 < t_1 < h$

men $g'(0) = g'(t_1) = 0$ så $\exists t_2$, $0 < t_2 < t_1$ $g''(t_2) = 0$

$\vdots$

etc. $\exists t_{r+1}$ så $g^{(r+1)}(t_{r+1}) = 0$. $0 < t_{r+1} < t_r < \dots < h$

Men detta betyder att

$$0 = g^{(r+1)}(t_{r+1}) = f^{(r+1)}(\underbrace{x_0 + t_{r+1}}_{=0}) - \underbrace{\cancel{p^{(r+1)}}(\;)}_{=0} - \frac{(r+1)!\,R(h)}{h^{r+1}}$$

$\Leftrightarrow$

$$R(h) = \frac{f^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!} h^{r+1}.$$

Inversa ~~funktionssatsen~~ funktionens derivata: Antag att $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ är deriverbar, $f'(x) > 0$. Och att $x_0 \in (a,b)$

$f(x_0) = y_0$.

Då kommer $f^{-1}(y)$ att vara deriverbar i y_0

Och $Df^{-1}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

<u>Bevis:</u> Vi vill visa att

$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k}$$ existerar. (1)

För att göra detta så måste vi kunna knyta ingredienserna i (1) till $f(x)$ som vi har någon information om.

Vi börjar med

I) $f^{-1}(y_0) = \{y_0 = f(x_0)\} = f^{-1}(f(x_0)) = x_0$

II) Är ens $f^{-1}(y_0+k)$ definierad?

Dvs kommer $y_0 + k \in V(f)$ (Värdemängden till f)

Vad är värdemängden till f?

i) f är strängt växande: eftersom $f' > 0$

Ty: Medelvärdessatsen: $z_0 < z_1 \xRightarrow{\text{medelvärde}} f(z_1) - f(z_0) = \underbrace{(z_1 - z_0)}_{>0} \underbrace{f'(\xi)}_{>0} > 0$

(Detta implicerar också att f är injektiv $\Rightarrow$ inverterbar)

ii) Så $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ för $a < x < b$

$\Rightarrow V(f) \subset [f(a), f(b)]$

iii) Om $y \in (f(a), f(b))$ så kommer,

(eftersom f är deriverbar och därför kontinuerlig) enl satsen om mellanliggande värden, $\exists x \in (a,b)$ så att $f(x) = y$. $\Rightarrow (f(a), f(b)) \subset V(f)$

Slutsats: ~~Om k~~ $y_0 \in (f(a), f(b))$, öppet,

Så det exsisterar en omgivning av y_0, säg, $(y_0 - l, y_0 + l) \subset (f(a), f(b))$

Så om k är litet $(|k| < |l|)$ så

kommer $y_0 + k \in V(f)$ ~~$\Rightarrow f^{-1}(y_0+k)$ väldef.~~

Dvs. $\exists x_k \in (a,b)$ så att $f(x_k) = y_0 + k$.

Så $\quad f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0) = x_k - x_0 \quad$ ($\neq 0$ då $k \neq 0$, f^{-1} injektiv)

$$k = (\underbrace{(y_0+k)}_{f(x_k)} - \underbrace{y_0}_{f(x_0)}) = f(x_k) - f(x_0)$$ ($\neq 0$ då $k \neq 0$ eftersom f injektiv)

$$\Rightarrow \quad \frac{f^{-1}(y_0+k) - f^{-1}(y_0)}{k} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} \qquad (2)$$

Vi vill ta gränsvärdet $k \to 0$ på båda sidor av (2), då måste vi veta vad som händer med $x_k - x_0$ då $k \to 0$.

Vi kommer bevisa: f^{-1} är kontinuerlig, då

$$x_k - x_0 = f^{-1}(x_0+k) - f^{-1}(x_0) \to 0 \quad \text{då } k \to 0.$$

Enl. den ekvivalenta öppna mängds def av kontinuitet så måste vi bevisa att

$$\underbrace{f(\alpha,\beta)}_{\text{pre image av } f^{-1}} \text{ är öppen för } \alpha, \beta \in [a,b]$$

Men $f((\alpha,\beta)) = (f(\alpha), f(\beta))$ vilken är öppen eftersom

i) $x \in (\alpha,\beta) \Rightarrow f(x) \in (f(\alpha), f(\beta))$ då f är strängt växande

ii) f antar alla värden i $(f(\alpha), f(\beta))$ då x löper genom (α,β) enl. satsen om mellanliggande.

Så $x_k \to x_0$ då $k \to 0$.

Vi har därför bevisat att

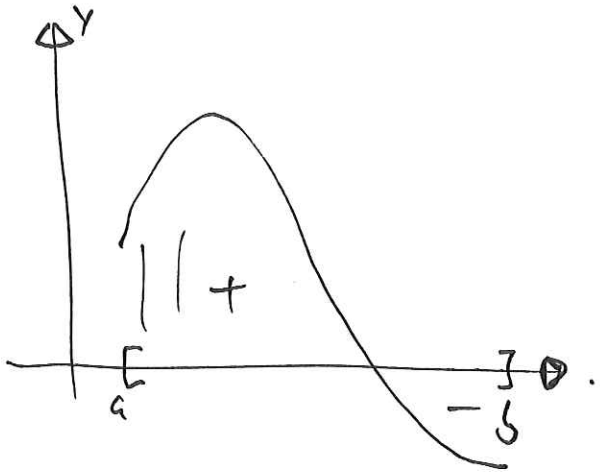
$$\lim_{k \to 0} \frac{f^{-1}(x_0+k) - f(x_0)}{k} = \lim_{x_k \to 0} \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} f(x_k) \neq f(x_0) \\ x_k \neq x_0 \end{array} \right\} = \lim_{x_k \to 0} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}}_{\neq 0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

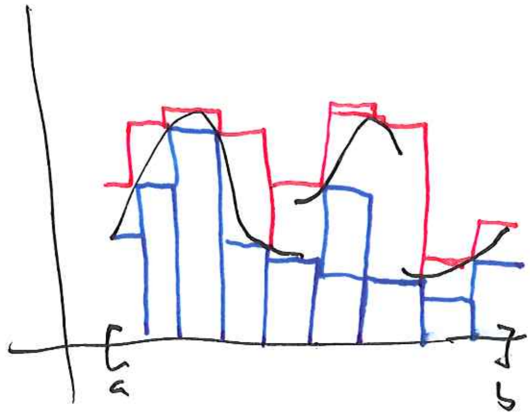
$\blacksquare$

Integration. (Darbouxs integralen)

Problem: Beräkna ytan under $f(x): [a,b] \mapsto \mathbb{R}$.



Samma idé som i envariabelanalysen



Vi delar in $[a,b]$ i intervall, en indelning

$$P = \{ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \}$$

Och definierar

$$L(P) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \overbrace{\inf_{x \in (x_{j-1}, x_j)} f(x)}^{= m_j}$$

(Blå yta mindre än $\int$.)

$$U(P) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \cdot \overbrace{\sup_{x \in (x_{j-1}, x_j)} f(x)}^{= M_j}$$

(Röd större yta)

Observera att om f är begränsad så

$$M_j = \sup_{x\in(x_{j-1},x_j)} f(x) = \text{l.u.b.}\{f(x);\ x\in(x_{j-1},x_j)\}$$

Väldefinierad eftersom $\{f(x);\ x\in(x_{j-1},x_j)\}$ är icke-tom och begränsad från ovan.

$$m_j = \inf_{x\in(x_{j-1},x_j)} f(x)$$ är också väldefinierad.

Eftersom $m_j \leq M_j$ så $L(P) \leq U(P)$.

Definition: Om

$$\underline{I} = \sup_P L(P) = \inf_P U(P) = \overline{I}$$

där supremum resp. infimum tas över alla indelningar så säger vi att f är integrerbar på $[a,b]$ och skriver

$$\cancel{I} \quad \int_a^b f(x)\,dx = \overline{I} = \underline{I}$$

Detta är helt naturligt om det finns ett värde $I \in \mathbb{R}$ så att vi är säkra på att $\int_a^b f(x)\,dx$ är större än $\underline{I}$ och mindre än $\overline{I}$ så måste värdet vara I.

Sats: Om det för varje $\varepsilon > 0$ finns en indelning P_ε så att

$$0 \le U(P_\varepsilon) - L(P_\varepsilon) < \varepsilon$$ så är f integrerbar.

Alltid sant.

Bevis: Om P_ε existerar

$$0 \le \overline{I} - \underline{I} = \inf_P \sum (x_j - x_{j-1}) M_j - \sup_P \sum (x_k - x_{k-1}) m_k \le$$

$$\le U(P_\varepsilon) - L(P_\varepsilon) < \varepsilon .$$

$\Rightarrow |\overline{I} - \underline{I}| < \varepsilon$ för alla ε

$\Rightarrow \overline{I} = \underline{I}$.

$\blacksquare$

Fråga

Vilka funktioner är integrerbara?

Exempel 1: Om f är kont. på $[a,b]$ så är f integrerbar.

Bevis: f kont. på kompakt $[a,b]$

$\Rightarrow$ f likformigt kont.

$\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ så att $|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$

om $|x-y| < \delta$.

Välj $P_\varepsilon = \{a = x_0 < x_0+\delta < x_0+2\delta < \cdots < x_n = b\}$

då kommer $M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{b-a}$

Så

$$U(P_\varepsilon) - L(P_\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) M_j - \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) m_j =$$

$$= (M_j - m_j) \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Exempel 2. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

är inte integrerbar.

Bevis: För varje indelning P så kommer

$$M_j = \sup_{x \in (x_{j-1}, x_j)} f(x) = 1 \quad \Rightarrow U(P) = 1$$

$$m_j = \inf_{x \in (x_{j-1}, x_j)} f(x) = 0 \quad \Rightarrow L(P) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \overline{I} = \inf U(P) = 1 \neq 0 = \sup L(P) = \underline{I}.$$

<u>Exempel</u>: Låt $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{om } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{om } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

Då är $f(x)$ integrerbar.

<u>Bevis</u>: Vi vill visa att $\overline{I} - \underline{I} < \varepsilon$ för alla $\varepsilon > 0$.

Välj ett $k \in \mathbb{N}$. Då finns det

$k+1$ punkter x_j så att $f(x_j) \geq \frac{1}{k}$,

specifikt $x_j = \frac{j}{k}$ för $j = 0, \ldots, k$.

Välj $P = \{0 < \delta < x_1 - \delta < x_1 + \delta < x_2 - \delta < x_2 + \delta < \ldots < 1 - \delta < 1\}$

där $\delta < \frac{1}{2k(k+1)}$.

Då kommer

$$U(P) = \sum_{j=1}^{2k} (x_j - x_{j-1}) M_j$$

<u>Typ 1</u>

Om M_j är sådant att $M_j = \sup_{x \in (x_j - \delta, x_j + \delta)} f(x)$

så kommer $M_j \leq 1$ och $(x_j - x_{j-1}) M_j \leq 2\delta 1 < \frac{1}{k(k+1)}$

och det finns maximalt $k+1$ sådana j

$$\sum_{\text{Typ 1}} (x_j - x_{j-1}) M_j < (k+1) \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}$$

Typ 2

Om M_j är sådant att $M_j = \sup_{x \in (x_l+\delta,\, x_{l+1}-\delta)} f(x)$

så kommer $M_j \leq \frac{1}{k}$ så $\sum_{\text{Typ 2}} (x_j - x_{j-1}) \underbrace{M_j}_{\leq \frac{1}{k}} \leq$

$$\leq \frac{1}{k} \cdot \sum_{\text{Typ 2}} (x_j - x_{j-1}) < \frac{1}{k}.$$

Så $$\sum_j (x_j - x_{j-1}) M_j = \underbrace{\sum_{\text{Typ 1}} (x_j - x_{j-1}) M_j}_{< \frac{1}{k}} + \underbrace{\sum_{\text{Typ 2}} (x_j - x_{j-1}) M_j}_{< \frac{1}{k}} < \frac{2}{k}.$$

Genom att välja k stort så kommer

$$U(P_k) = \sum_j (x_j - x_{j-1}) M_j < \frac{2}{k} < \varepsilon.$$

Observera att, eftersom $f(x) = 0$ på en tät mängd så $L(P_k) = 0$ för alla k. Så $\forall \varepsilon > 0$ existerar det ett indelning P_k så att $U(P_k) - L(P_k) < \varepsilon$.

$\Rightarrow$ f är integrerbar.