3 oktober, 2016, Föreläsning 9

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Span (linjära höljet) av vektorer i $\mathbb{R}^n$
- Delrum i $\mathbb{R}^n$
- Linjärt beroende och oberoende vektorer

1. **Definition.** Låt $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_k$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$.

(1) Span (linjära höljet) av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_k$ är den delmängd av $\mathbb{R}^n$ som består av alla linjärkombinationer $t_1\vec{v}_1+t_2\vec{v}_2+\cdots+t_k\vec{v}_kn$ där t_i är ett tal. Span av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_k$ betecknas med $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$.

(2) Vi säger att $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_k$ genererar eller *spänner upp* $\mathbb{R}^n$ om $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{R}^n$. Alltså $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_k$ genererar $\mathbb{R}^n$ om och endast om alla vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som linjärkombinationer av $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,…,$\vec{v}_k$.

2. Låt

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \ \vec{v}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}, \ \vec{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

En vektor $\vec{w}$ ligger i $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ (kan skrivas som linjärkombination av $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$) om och endast om följande system har en lösning,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \end{array}\right]$$

Om $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$ är en lösning, då är $\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_k\vec{v}_k$.

Kom ihåg att systemet har en lösning för alla $\vec{w} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ om och endast om rangen $=$ n.

3. **Uppgift.** Kan vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ och $\vec{v}_3$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

skrivas som en linjärkombination av vektorerna $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$, $\vec{u}_4$ om

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{u}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Svar: All tre vektorerna $\vec{v}$ kan skrivas som en linjärkombination av $\vec{u}$-vektorerna.

4. **Proposition.**

(1) $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{R}^n$ ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ genererar $\mathbb{R}^n$) om och endast om rangen $= n$.
(2) Om $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k) = \mathbb{R}^n$, då är $k \geq n$.

5. **Uppgift.** Fundera på följande

- Kan 3 vektorer generera $\mathbb{R}^4$?
- Kan 5 vektorer generera $\mathbb{R}^4$?
- Är det sant att 5 olika vektorer i $\mathbb{R}^4$ alltid genererar $\mathbb{R}^4$?

Svar: Nej, Ja, Nej.

6. **Span av en vektor.**

Låt $\vec{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Det finns två möjligheter för $\mathrm{Span}(\vec{v}) = \{t\vec{v} \mid t \text{ är ett tal}\}$.

(1) $\mathrm{Span}(\vec{0}) = \{\vec{0}\}$
(2) Om $\vec{v} \neq 0$ då är $\mathrm{Span}(\vec{v})$ linjen genom origo med riktning $\vec{v}$

7. **Span av två vektorer.**

Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Det finns tre möjligheter för $\mathrm{Span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{t\vec{v} + s\vec{w} \mid t, s \text{ är tal}\}$.

(1) $\mathrm{Span}(\vec{0}, \vec{0}) = \{\vec{0}\}$

(2) Om $\vec{v} \neq \vec{0}$ och om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är parallella dvs $\vec{w} = \lambda\vec{v}$, då är

$$\text{Span}(\vec{v}, \vec{w}) = \{t\vec{v} + s\vec{w} = t\vec{v} + s\lambda\vec{v} = (t + \lambda s)\vec{v} \mid s, t \text{ är tal}\} = \text{Span}(\vec{v})$$

linjen genom origo med riktning $\vec{v}$.

(3) Om $\vec{v} \neq \vec{0}$ och $\vec{w} \neq \vec{0}$ och $\vec{v}$, $\vec{w}$ inte är parallella, då kallas $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$ för ett **plan** i $\mathbb{R}^n$.

8. **Uppgift.** Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Undersök om vektorn $\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ ligger i $\text{Span}(\vec{v}, \vec{w})$.

9. **Uppgift.** Undersök om $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ genererar $\mathbb{R}^3$.

Svar: 8) Nej 9) Ja

Följande är viktiga egenskaperna hos Span

10. **Proposition.** Betrakta $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ i $\mathbb{R}^n$.

(1) $\vec{0}$ ligger i $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$
(2) Om $\vec{v}, \vec{w}$ är i $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k n)$ då är $\vec{v} + \vec{w}$ i $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$
(3) Om $\vec{v}$ är i $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ då är $t\vec{v}$ i $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ där t är ett tal

11. **Definition.** En delmängd V i $\mathbb{R}^n$ kallas för **delrum** om

(1) $\vec{0}$ ligger i V
(2) om $\vec{v}, \vec{w}$ är i V då $\vec{v} + \vec{w}$ är i V
(3) om $\vec{v}$ är i V då $t\vec{v}$ är i V där t är ett tal

Exempelvis om $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ är vektorer i $\mathbb{R}^n$, då är $\text{Span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k)$ ett delrum i $\mathbb{R}^n$.

12. **Proposition.** Alla delrum i $\mathbb{R}^n$ kan skrivas som $\text{Span}(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k)$, där $k \leq n$.

13. En delmängd av $\mathbb{R}^n$ som består av alla lösningar till

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & = & b_2 \\
a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3k}x_k & = & b_3 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}x_n & = & b_n
\end{array}$$

är ett delrum i $\mathbb{R}^n$ om och endast om $b_1 = b_1 = \cdots = b_n = 0$. Det betyder att lösningarna till ett homogen system bildar ett delrum. Lösningarna till ett icke-homogen system bildar inte ett delrum.

14. Betrakta $W = \mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k)$ i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{v}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$.

Två frågor att fundera på

(1) Kan $\vec{v}$ skrivas som linjär kombination av $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$, dvs, ligger $\vec{v}$ i $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k)$?
(2) Låt $\vec{v}$ vara i $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k)$. På hur många olika sätt kan $\vec{v}$ skrivas som en linjär kombination av $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$.

15. **Definition.**

(1) Vektorerna $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för linjärt oberoende om alla vektorer i $\mathrm{Span}(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k)$ kan skrivas på ett unikt sätt som en linjärkombination av $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$
(2) Vektorerna $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ kallas för linjärt beroende om de är inte oberoende

Till exempel vektorerna $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ i $\mathbb{R}^n$ är linjär oberoende.

16. **Proposition.** Låt $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \ldots, \vec{v}_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$. Följande påståenden är ekvivalenta

(1) $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ är linjär oberoende
(2) Ingen av $\vec{v}_i$ kan skrivas som linjärkombination av de andra vektorerna $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_{i+1}, \ldots, \vec{v}_k$.
(3) Om $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$, då är $c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0$
(4) Följande matris har rang k (alla variabler är pivot)

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_3 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Eftersom rangen av en $n \times k$-matris inte kan vara större än n eller k, kan vi konstatera att om vektorerna $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende, då är $k \le n$.

17. **Proposition.** Vektorerna $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ i $\mathbb{R}^n$ är linjär beroende om och endast om det finns tal $c_1, \ldots, c_k$ som inte alla är noll och $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_k\vec{v}_k = 0$, dvs om följande homogena systemet har en lösning som är inte $\vec{0}$,

$$\begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_3 & \cdots & \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

18. **Uppgift.** Fundera på följande

- Kan 5 vektorer i $\mathbf{R}^4$ vara linjärt oberoende?
- Kan 3 vektorer i $\mathbf{R}^4$ vara linjärt oberoende?
- Är det sant att 3 vektorer i $\mathbf{R}^4$ alltid är linjärt oberoende?

Svar: Nej, Ja, Nej.

19. **Uppgift.** Undersök om $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$ är linjärt oberoende.

Svar: De är inte linjärt oberoende.