F9

Förra föreläsningen så började vi beskriva kompletteringen av ett metriskt rum M; Dvs hitta $\hat{M}$

i) $M \subset \hat{M}$ $\quad (f: M \longmapsto \hat{M})$

ii) $d(x,y) = \hat{d}(f(x), f(y))$ för alla $x, y \in M$

iii) $\hat{M}$ komplett (Cauchy följder konvergerar).

Vi definierade

$$\hat{M} = \{ [(a_j)] ; \quad a_j \text{ är Cauchy följd i } M$$

$[(a_j)]$ är ekvivalensklassen av följden

$(a_j) \sim (b_j)$ om $\lim_{j\to\infty} d(a_j, b_j) = 0 \}$.

$$\hat{d}([(a_j)], [(b_j)]) = \lim_{j\to\infty} d(a_j, b_j).$$ Väldefinierat!

Vi har en naturlig inbäddning

$f: M \longmapsto \hat{M}$ så $a \in M$ avbildas på $(\dot{a}) = (a, a, \dots)$

Men är $\hat{M}$ komplett

Lemma: Om (a_j) är en Cauchy följd i M

då kommer $[(\mathring{a}_j)] \to [(a_j)]$ i $\hat{M}$.

$\mathring{a}_j$: konstant följd

Bevis: Vi måste bevisa att

$$\lim_{j\to\infty} \hat{d}\left([(\mathring{a}_j)], [(a_k)]\right) = 0$$

dvs

$$\lim_{j\to\infty}\left[\lim_{k\to\infty} d(a_j, a_k)\right] = 0 \qquad (1)$$

Eftersom (a_j) är Cauchy så $\exists N_\varepsilon$ för $\varepsilon > 0$ så att

$$d(a_j, a_k) < \varepsilon \qquad \text{för} \qquad j, k > N_\varepsilon$$

Så ~~dvs~~ $\lim_{k\to\infty} d(a_j, a_k) < \varepsilon$ om $j > N_\varepsilon$

Sätt in: (1) gen

för $\varepsilon > 0$ $$\lim_{j\to\infty}\underbrace{\left[\lim_{k\to\infty} d(a_j, a_k)\right]}_{0 < \quad < \varepsilon} \leq \varepsilon$$

∎

Vi har bara visat att varje Cauchy följd i M konvergerar i $\hat{M}$. Vi måste också visa att $[(a_j^k)] \in \hat{M}$, Cauchy, konvergerar.

<u>Sats</u>: $\hat{M}$ är komplett. Dvs $[(a_j^k)] \in \hat{M}$ Cauchy $\Rightarrow \exists [(b_j^k)] \in \hat{M}$, $\lim_{k\to\infty} [(a_j^k)] = [(b_j^k)]$

<u>Steg 1</u>: Vi kan antaga att

$$\boxed{d(a_j^k, a_l^k) < \frac{1}{k}}$$

Eftersom klassen är oberoende av vilken följd som representerar den så kan vi istället välja

$\left[\left(a^k_{j+N_{1/k}}\right)\right]$ som representant där, $N_{1/k} > 0$, är

$$j,l > N_{1/k} \Rightarrow d(a_j^k, a_l^k) < \frac{1}{k}.$$

<u>Steg 2</u>: Definiera $b_j = a_j^j$, då är (b_j) Cauchy.

$$d(b_j, b_l) = d(a_j^j, a_l^l) \le \underbrace{d(a_l^j, a_m^j)}_{<\varepsilon/3 \text{ if } m \gg 1 \text{ since } (a_l^j) \text{ is Cauchy}} + d(a_m^j, a_l^l) \le \frac{\varepsilon}{3} + d(a_m^j, a_m^l) + \frac{1}{l}$$

och eftersom $[(a_j^k)]$ är Cauchy så kommer

$$\hat{d}([a_m^j], [a_m^l]) = \lim_{m\to\infty} d(a_m^k, a_m^l) < \varepsilon/3 \quad \text{om } j,l \gg 1$$

så $d(b_j, b_l) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{l} < \varepsilon$ om $j,l \gg 1$.

$$\boxed{\textbf{Steg 3} \qquad \lim_{k\to\infty} [(a_j^k)] = [(b_j)].}$$

Vi ska visa att

$$0 = \lim_{k\to\infty} \hat{d}\left([(a_j^k)],[(b_j)]\right) = \lim_{k\to\infty}\left[\lim_{j\to\infty} d(a_j^k, b_j)\right] \le$$

$$\le \lim_{k\to\infty}\left[\lim_{j\to\infty} \underbrace{d(a_k^k, b_j)}_{\substack{= d(b_k, b_j) < \\ < \varepsilon \text{ if } j,k \gg 1}} + \underbrace{d(a_j^k, a_k^k)}_{< \frac{1}{k} \to 0}\right] < \varepsilon$$

för alla $\varepsilon > 0 \ldots$

$\blacksquare$

<u>Sats</u> (Taylors Sats). Antag att $f(x)$ är definierad på (a,b) och att f har r kontinuerliga derivator i x_0. en omgivning av x_0 (Inte i Pugh)

Låt $p(x)=\sum_{j=0}^{r}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ då kommer

a) Om

$$R(h)=f(x_0+h)-p(x_0+h) \quad \text{då:}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h^r}=0 \qquad (1)$$

b) $p(x)$ är det enda polynomet av grad $\leq r$ med den egenskapen.

c) Om f har $(r+1)$ derivator i x_0 då

$$R(h)=\frac{f^{(r+1)}(\theta)}{(r+1)!}h^{r+1}$$ för något h mellan x_0 och x_0+h.

<u>Bevis:</u> $h>0$

a) $R(h)=R(h)-0 \underbrace{=}_{\text{medelvärdessatsen}} R'(\theta_1)h=(R'(\theta_1)-\underbrace{R'(0)}_{=0})h=$

$=R''(\theta_2)\theta_1 h= \dots =R^{(r)}(\theta_r)\theta_{r-1}\theta_{r-2}\cdots\theta_1 h$

där $0\leq\theta_{r-1}\leq\theta_{r-2}\leq\dots\leq\theta_1\leq h$ så

$\left|\frac{R(h)}{h^r}\right|\leq R^{(r)}(\theta_r)$. När $h\to 0$ så $\theta_r\to 0$ dvs $\lim_{h\to 0^+}R^{(r)}(\theta_r)=0$.

b) Låt p och q vara två olika polynom av grad $\leq r$ som uppfyller (1) med R_p resp. R_q.

Då kommer $R_q = f - q = \underbrace{(f-p)}_{R_p} + \underbrace{(p-q)}_{\text{poly av grad } \leq r}$

Så $\frac{R_q - R_p}{h^r} = \frac{p-q}{h^r} \to 0$ omm $p = q$.

$0 \leftarrow \frac{R_q - R_p}{h^r}$

c) Använd medelvärdessatsen en gång till i a).
