

INNEHÅLL

- Konditionstal och Konditionssats.

1. Def.

$$\left\| \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \max \left\{ \begin{array}{l} |a_{11}| + |a_{12}| + \cdots + |a_{1n}| \\ |a_{21}| + |a_{22}| + \cdots + |a_{2n}| \\ \vdots \\ |a_{m1}| + |a_{m2}| + \cdots + |a_{mn}| \end{array} \right\}$$

Till exempel:

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 5 \quad \left\| \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \max\{4, 14, 1\} = 19$$

$\|A\|_{\infty}$ kallas för **max norm** av A .

2. **Proposition.** Max norm har följande egenskaper:

- (1) $\|A\|_{\infty} \geq 0$;
- (2) $\|A\|_{\infty} = 0$ om och endast om $A = 0$;
- (3) $\|\alpha A\|_{\infty} = |\alpha| \|A\|_{\infty}$ där α är i \mathbf{R} ;
- (4) $\|A + B\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} + \|B\|_{\infty}$;

3. Vi har ofta att göra med följande scenario:

- (1) Antar att en slutsats erhålls genom att lösa ett system av linjära ekvationer:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

- (2) Matrisen A beskrivs precis.
- (3) Vi måste göra mätningar för vektor \vec{b} och i verkligheten får vi aldrig exakta koordinater av \vec{b} . Vi vet graden av felet när mätningar görs. Låt \vec{b}_a vara en approximation av \vec{b} . Vektorn \vec{b}_a är våra mätningar. För att vi vet graden av felet, kan $\|\vec{b} - \vec{b}_a\|_{\infty}$ inte vara store än något fel.

$\vec{b} - \vec{b}_a$ kallas för residual error och $\ \vec{b} - \vec{b}_a\ _{\infty}$ kallas för backward error .
--

$$\frac{\|\vec{b}-\vec{b}_a\|_\infty}{\|\vec{b}\|_\infty} \text{ kallas för } \mathbf{relative\ backward\ error}$$

Till exempel betrakta följande system:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1.0001 & 1 & 2.0001 \end{array} \right]$$

Här $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix}$. Låt $\vec{b}_a = \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix}$. **Backward error** är lika med:

$$\|\vec{b} - \vec{b}_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.0001 \\ 2 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} -0.0001 \\ 0.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 0.0001$$

$$\|\vec{b}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2.0001$$

Relative backward error är lika med $\frac{0.0001}{2.0001} < 0.00005 = 0.005\%$ av $\|\vec{b}\|_\infty$.

(4) Istället för att lösa $A\vec{x} = \vec{b}$, vi kan bara lösa $A\vec{x}_a = \vec{b}_a$. Fråga bedöma $\|\vec{x} - \vec{x}_a\|_\infty$?

$$\|\vec{x} - \vec{x}_a\|_\infty \text{ kallas för } \mathbf{forward\ error}.$$

$$\frac{\|\vec{x}-\vec{x}_a\|_\infty}{\|\vec{x}\|_\infty} \text{ kallas för } \mathbf{relative\ forward\ error}$$

I exempel ovan har vi $\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{x}_a = \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix}$. **Forward error** är lika med:

$$\|\vec{x} - \vec{x}_a\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ -2.0001 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 2.0001$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1$$

Relative forward error är lika med $\frac{2.0001}{1} > 2 = 200\%$ av $\|\vec{x}\|_\infty$.

$$(5) \frac{\text{relative forward error}}{\text{relative backward error}} = \frac{\|\vec{x}-\vec{x}_a\|_\infty/\|\vec{x}\|_\infty}{\|\vec{b}-\vec{b}_a\|_\infty/\|\vec{b}\|_\infty} \text{ kallas för } \mathbf{error\ magnification\ factor}$$

I exempel ovan **error magnification factor** är lika med:

$$\frac{2.0001}{0.0001/2.0001} > \frac{4}{0.0001} = 40000$$

4. Theorem.

Låt A vara en inverterbar matris. För alla vektorer \vec{b} , **error magnification factor** av $A\vec{x} = \vec{b}$ är mindre eller lika med $\text{cond}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$. Dessutom finns det en vektor \vec{c} för vilken **error magnification factor** av $A\vec{x} = \vec{c}$ är lika med $\text{cond}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$.

Satsen säger att $\text{cond}(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$ är den största **error magnification factor** av $A\vec{x} = \vec{b}$ för alla vektorer \vec{b} .

I exempel ovan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1.0001 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{0.0001} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1.0001 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10000 & 10000 \\ 10001 & -10000 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_\infty = 2.0001 \quad \|A^{-1}\|_\infty = 20001$$

$$\text{cond}(A) = 2.0001 \cdot 20001$$

5. **Uppgift.** Du ska lösa följande linjära ekvationssystem

$$\begin{aligned} x - 1y + z &= b_1 \\ 1x + 3y + 2z &= b_2 \\ x + 2z &= b_3 \end{aligned}$$

För att få värdena i högerledet måste du utföra mätningar. Dina mätdata är behäftade med relativt fel som är av storleksordningen 10^{-3} . Vad kommer den övre gränsen på relativa felet i lösningen bli?