September 26, 2016. Föreläsning 7.

Tillämpad linjär algebra

INNEHÅLL

- Matriser med speciella former.
- LU-faktorisering.
- Beräkningskostnad - komplexitet.

Matriser med speciella former

1. en $n \times n$ **diagonal** matris:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

D är inverterbar om $d_i \neq 0$ för alla i och i så fall:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

2. En **symmetrisk matris**, $A = [a_{ij}]$, är en matris som har egenskapen att $a_{ij} = a_{ji}$ for alla i och j. Det betyder att i-te kolonn är lika med i-te rad. Alltså, en symmetrisk matris måste vara kvadratisk (antalet av rad är lika med antalet av kolonner). En diagonal matris är symmetrisk.

3. En **gles** $n \times n$-matris är en matris som till största delen består av element som är noll. En vanlig typ av glesa matriser är bandade matriser där alla element utanför ett smalt band (av storlek m) runt diagonalen är noll. För att matrisen ska kallas gles så bör $m << n$.

En tridiagonal $n \times n$-bandmatris, $m = 3$, ser ut på följande sätt

$$A = \begin{bmatrix} * & * & & & & \\ * & * & * & & & \\ & * & * & * & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & * & * & * \\ & & & & * & * \end{bmatrix}$$

4. En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **övertriangulär** (en. upper triangular) om alla element nedanför huvuddiagonalen är noll.

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

En kvadratisk $n \times n$-matris kallas för **undertriangulär** (en. lower triangular) om alla element ovanför huvuddiagonalen är noll.

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

5. **Proposition.** Triangulära matriser har följande egenskaper

(1) Produkten av två undertriangulära/övertriangulära matriser är en undertriangulär/övertriangulär matris.
(2) En triangulär matris är inverterbar om och endast om all diagonalelement är skilda från noll. *Varför är det så?*
(3) Inversen av en inverterbar under/övertriangulär matris är under/övertriangulär.

6. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Verifiera de listade egenskaperna (ovan) för triangulära matriser.

7. **Uppgift.** Lös $L\vec{x} = \vec{b}$ där

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 14 \end{bmatrix}$$

8. **Uppgift.** Lös $U\vec{x} = \vec{b}$ där

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix}$$

9. **Uppgift.** Vilken form får matrisen LU om L är en undertriangulär matris och U är en övertriangulär matris?

10. **Uppgift.** Hitta alla 3×3-diagonalmatriser, D, som har egenskapen att $D^2 = DD = D$.

LU faktorisering

11. Låt $n \geq i > j$ och definiera $n \times n$ matriser:

$$L_{i,j}(c) := \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & j & & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad P_{i,j} := \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ j \\ \\ i \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} & & & j & & i & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Börja med $n \times n$ identitetsmatris I_n

- Matrisen $L_{i,j}(c)$ erhålls genom att utföra följande radoperationer till I_n: multiplicera j-te rad med c och addera till i-te rad.
- Matrisen $P_{i,j}$ erhålls genom att utföra följande radoperationer till I_n: byte i-te rad med j-te rad och vice versa.

12. **Proposition.**

- Låt $A = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$ vara $n \times m$ matris. Då

$$L_{i,j}(c)A = L_{i,j}(c) \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_i + cR_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \qquad P_{i,j}A = P_{i,j} \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_j \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

- $L_{i,j}(c)$ är inverterbar och $L_{i,j}(c)^{-1} = L_{i,j}(-c)$.
- $P_{i,j}$ är inverterbar och $P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}$.

$\boxed{\textbf{Gauss rad eliminering kan beskrivas genom att multiplicera med } L_{i,j}(c) \textbf{ och } P_{i,j}\textbf{.}}$

Till exampel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 \end{bmatrix} = L_{2,1}(c_{21})\ L_{3,1}(c_{31})\ L_{3,2}(c_{32})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 \end{bmatrix} = L_{2,1}(c_{21})\ L_{3,1}(c_{31})\ L_{4,1}(c_{41})\ L_{3,2}(c_{32})\ L_{4,2}(c_{42})\ L_{4,3}(c_{43})$$

Antar att A är $n \times n$ matris och den kan Gauss transformeras till övertriangulär matris U, utan att göra rad byte. Det betyder att:

Step 1. $R_2 \rightsquigarrow (R_2 - c_{21}R_1)$ (multiplicera rad 1 med c_{21} och subtrahera från rad 2). Detta kan beskrivas genom matris multiplikation $L_{2,1}(-c_{21})A$.

Step 2. $R_3 \rightsquigarrow (R_3 - c_{31}R_1)$ (multiplicera rad 1 med c_{31} och subtrahera från rad 3). Detta kan beskrivas genom matris multiplikation $L_{3,1}(-c_{31})\ L_{2,1}(-c_{21})A$.

Step 3. $R_4 \rightsquigarrow (R_4 - c_{41}R_1)$ (multiplicera rad 1 med c_{41} och subtrahera från rad 4). Detta kan beskrivas genom matris multiplikation $L_{4,1}(-c_{41})\ L_{3,1}(-c_{31})\ L_{2,1}(-c_{21})A$.

Step 4. Fortsätt kolonnvis och få

$$\begin{array}{ccccccc} L_{n,n-1}(-c_{n\ n-1}) & & & & & & \\ L_{n,n-2}(-c_{n\ n-2}) & L_{n-1,n-2}(-c_{n-1\ n-2}) & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ L_{n,1}(-c_{n1}) & L_{n-1,1}(-c_{n-1\ 1}) & \cdots & L_{3,1}(-c_{31}) & L_{2,1}(-c_{21}) & A & = U \end{array}$$

Step 5. Multiplicera med inverserna av $L_{\bullet,\bullet}(-c_{\bullet\bullet})$ och få:

$$\begin{array}{cccccccc} A = & L_{2,1}(c_{21}) & L_{3,1}(c_{31}) & \cdots & L_{n-1,1}(c_{n-1\ 1}) & L_{n,1}(c_{n1}) & & \\ & & L_{3,2}(c_{32}) & \cdots & L_{n-1,2}(c_{n-1\ 2}) & L_{n,2}(c_{n2}) & & \\ & & \vdots & \vdots & & & & \\ & & & & L_{n-1,n-2}(c_{n-1\ n-2}) & L_{n,n-2}(c_{n\ n-2}) & & \\ & & & & & L_{n,n-1}(c_{n\ n-1}) & U & \end{array}$$

som ger:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{21} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1\ 1} & c_{n-1\ 2} & c_{n-1\ 3} & c_{n-1\ 4} & \cdots & 1 & 0 \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & c_{n4} & \cdots & c_{n\ n-1} & 1 \end{bmatrix} U = LU$$

Den ovan kallas för en **LU faktorisering** av A. Den beskriver A som multiplikation av undertriangulär matris L med 1-or på diagonalen och övertriangulär matris U.

13**. Exempel**. Bestäm en LU-faktorisering av

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } 2\times \text{ rad 1 från rad 2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } -3\times \text{ rad 1 från rad 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{subtrahera } -\tfrac{7}{3}\times \text{ rad 2 från rad 3} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = U$$

Den undertriangulära matrisen L skapas med ettor på diagonalen och rad-multiplikatorerna i den undre triangeln,

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -\frac{7}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Det kan finnas fler LU-faktoriseringar av en matris A. Det beror på hur man gör faktoriseringen. Tillvägagångssättet som presenteras ovan är från *Numerical Analysis* av Sauer.

14**.** Antar att $A = LU$ är LU faktorisering (där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U en övertriangulär matris).

Om vi vill lösa det linjära ekvationssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ kan vi istället lösa $LU\vec{x} = \vec{b}$.

Lösningsalgoritmen kan skrivas som

(1) LU-faktorisera $A \Rightarrow LU\vec{x} = \vec{b}$.
(2) Låt $\vec{y} = U\vec{x}$ och lös det undertriangulära systemet $L\vec{y} = \vec{b}$ genom **framåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{y}$.
(3) Lös nu det övertriangulära systemet $U\vec{x} = \vec{y}$ genom **bakåtsubstitution** $\Rightarrow \vec{x}$.

Att lösa ett linjärt ekvationssystem med LU-faktorisering är väldigt effektivt om man har ett system med flera högerled.

Beräkningskostnad - komplexitet

15. När vi löser ett problem numeriskt med hjälp av en dator är beräkningskostnaden intressant. Beräkningskostnaden för en datoralgoritm mäts vanligtvis i antalet flyttalsoperationer (**flop**). En flop är en multiplikation, division, addition eller subtraktion.

Vi skriver att funktion $f(n)$ är $O(g(n))$ om det finns ett tall A så att, för alla $n >> 0$, $f(n)/g(n) < A$. Det betyder att $f(n)$ är begränsad av $g(n)$.

16. **Framåtsubstitution.**

- INPUT: $n \times n$ matris övertriangulär matris med 1-or på diagonalen L.
- OUTPUT: lösning till $L\vec{y} = \vec{b}$.
- Antalet av flop för att göra framåtsubstitution och lösa $L\vec{y} = \vec{b}$ är ungefär $n(n-1)$.
- Beräkning kostnad av framåtsubstitution är $O(n^2)$.

17. **Bakåtsubstitution.**

- INPUT: $n \times n$ matris undertriangulär matris U.
- OUTPUT: lösning till $U\vec{x} = \vec{y}$.
- Antalet av flop för att göra bakåtsubstitution och lösa $U\vec{x} = \vec{y}$ är ungefär $n(n-1)$.
- Beräkning kostnad av bakåtsubstitution är $O(n^2)$.

18. **LU-faktorisering.**

- INPUT: $n \times n$ matris A.
- OUTPUT: LU faktorisering $A = LU$, där L är en undertriangulär matris med ettor på diagonalen och U en övertriangulär matris.
- antalet av flop för att göra LU-faktorisering är ungefär $\frac{2}{3}n^3$.
- Beräkning kostnad av LU-faktorisering är $O(n^3)$.

19. Kostand av andra operationer:

operation	kostnad
Gauss elimination	$O(n^3)$
Beräkna inversen av A genom $[A\|I] \Rightarrow [I\|A^{-1}]$	$O(n^3)$
LU-faktorisering av A om A är en *gles bandmatris*	$O(n)$
Framåtsubstitution för en glas bandmatris	$O(n)$
Bakåtsubstitution för en gles bandmatris	$O(n)$

20. Om vi vet hur många flop/s (flops) en dator gör kan vi få en uppskattning av beräkningskostnaden i tid.

21. **Uppgift.** Antag att det tar 0.2 sekunder att Gauss-eliminera en $n \times n$-matris A på din dator när $n = 1000$. Hur lång tid skulle det ta att Gauss-eliminera ett matris med $n = 10000$ obekanta?

22. **Uppgift.** Antag att det tar 0.005 sekunder att göra en bakåtsubstitution med 5000 obekanta på en dator. Hur lång tid skulle det ta att göra en Gauss-elimination av en $n \times n$-matris där $n = 5000$?