Ett intressant exempel Cantormängden.

Vi jobbar med abstrakta mängder och metriska rum. Ofta så är vi intresserade av relationer

$f(K)$ är kompakt om f är kont och K kompakt.

Allt handlar om att hitta begrepp som är generella och användbara. Men för att förstå när teorin inte fungerar. Kan man bevisa att kompakta mängder har som mest ändligt många komponenter?

Man kan försöka, men man kommer inte att lyckas!

Kan man visa att Kompakta mängder ~~kan~~ kan ha oändligt många komponenter $\Rightarrow$ mycket lättare

det räcker med att hitta ett exempel: Cantor mängden

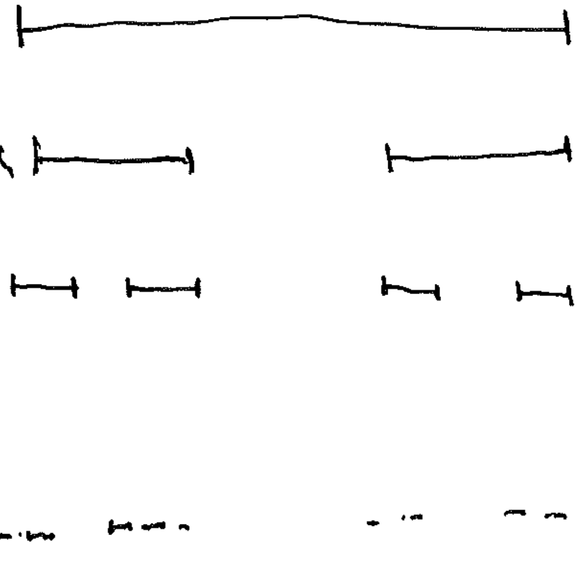
Låt $C^1 = [0,1]$

$C^2 = [0,1] \setminus$ mitten tredjedel

$C^3 = [0,1] \setminus \left\{ \begin{array}{l} \text{alla "mitten"} \\ \text{tredjedelar} \end{array} \right\}$

$\vdots$

C^n



Definiera $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n$ = Cantormängden.

Observera $\text{längden}\left(C^{n+1}\right) = \frac{2\,\text{längd}\left(C^n\right)}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \to 0$

~~Cantormängden~~ Cantormängden har "mått noll"

Eftersom alla C^n är kompakta (slutna & beg)

så är C kompakt ($\bigcap$ kompakta är kompakt.)

$C \neq \emptyset$ eftersom skärningen av "nested compact sets is non-empty."

Observera att vi kan skriva alla Reella tal $\subset [0,1]$

som
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad \text{där} \quad a_n = 0, 1 \text{ eller } 2.$$

Det är enkelt att se att mitten tredjedelen

består av alla x · så att $a_1 = 1$ $\Rightarrow$ Ta bort

⋮ ⋮

$$x \in C \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \quad a_n = 0 \text{ eller } 2.$$

då $x \in C \sim (a_1, a_2, \ldots, \ldots)$ $a_n = 0$ eller 2.

$$X \in [0,1] \overset{\text{binärt}}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n} \sim (b_1, b_2, \ldots) \quad b_n = 0 \text{ eller } 1.$$

Så det finns en väldigt naturlig bijektion

$f : C \longmapsto \mathbb{R}$.

från a_n · till $\frac{a_n}{2}$ ...

$(0, 2, 2, 0, 0, 2, \ldots)$

$\updownarrow$

$(0, 1, 1, 0, 0, 1, \ldots)$

Completion

Def: Vi säger att ett metriskt M rum är komplett om varje Cauchy följd $a_j \in M$ har ett gränsvärde a; $a_j \to a \in M$.

Vi visade tidigare att $\mathbb{R}$ är komplett — eller snarare vi skapade $\mathbb{R}$ så att $\mathbb{R}$ uppfyller minsta övre begränsningsegenskapen genom att ~~göra~~ definiera $\mathbb{R}$ som Dedekind snitt av $\mathbb{Q}$.

Vi kompletterar $\mathbb{Q}$ och får $\mathbb{R}$.

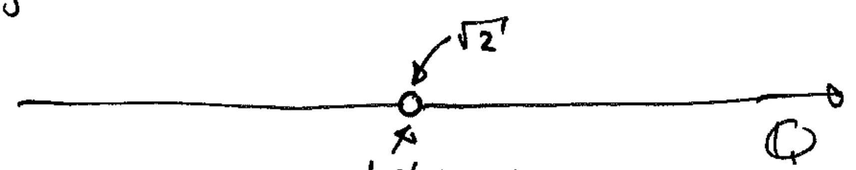
Def: En komplettering av ett metriskt rum M är ett metriskt rum $\hat{M}$ så att

1) $M \subset \hat{M}$ (Detta tolkas om en naturlig injektion $i : M \to \hat{M}$)

2) Om $x, y \in M \subset \hat{M}$ så kommer
$$d(x,y) = \hat{d}(f(x), f(y))$$

3) Varje Cauchy-följd $a_j \in \hat{M}$ konvergerar $a_j \to a \in \hat{M}$.

När vi betraktade "$\mathbb{Q}$" som en tallinje ~~och~~ och ville fylla i "hål" i linjen så var det naturligt att betrakta snitt. Men om vi vill komplettera $\mathbb{Q}$ till $\mathbb{R}$ så är en annan konstruktion mer naturlig.



hålet karakteriseras ett reellt tal ger snitt.

Vi vill att varje Cauchy följd $a_j \in \mathbb{Q}$ skall karakterisera ett ellement i "$\mathbb{R}$".

Låt oss definiera ett element i $\mathbb{R}$ som en Cauchy följd i $\mathbb{Q}$, Då kommer Cauchy följden $a_j \in \mathbb{Q}$ att karakterisera det reella talet $\underbrace{(a_j)}_{\text{följd}} \in \mathbb{R}$.

Det finns ett problem med den definitionen, olika Cauchy följder kan karakterisera samma reella tal.

Låt oss definiera

<u>Def</u>: 1) Två följder (a_j) & (b_j) är co-Cauchy om $\lim_{j\to\infty} a_j - b_j = 0$.

2) $(a_j) > (b_j)$ om det exsisterar ett $\delta > 0, \delta \in \mathbb{Q}$ och ett N_δ så att $a_j - b_j > \delta$ för $j > N_\delta$.

3) $(a_j) + (b_j) = (a_j + b_j)$

$(a_j) \times (b_j) = (a_j \times b_j)$

$\frac{(a_j)}{(b_j)} = \left(\frac{a_j}{b_j}\right)$ (om $b_j \neq 0$ för alla j)

4) Låt $[(a_j)]$ vara mängden av alla Cauchy följder som är co-Cauchy med (a_j).

Dvs $(b_j) \in [(a_j)]$ om $\lim_{j\to\infty} a_j - b_j = 0$

då kommer $[(a_j)] = [(b_j)]$. Vi definierar

$\mathbb{R} = \{$alla ekvivalensklasser $[(a_j)]$, (a_j) Cauchy följd i $\mathbb{Q}\}$

Vi kan definiera

(1) $[(a_j)] + [(b_j)] = [(a_j + b_j)]$ e.t.c. $+, -, \times, \div$

(2) "$>$" $[(a_j)] > [(b_j)]$ om $(a_j) > (b_j)$..

~~Vi måste säkerställa att detta är väldefinierat~~

Vi har nu ett knepigt rum $\mathbb{R}$ som vi hoppas är komplett. Låt oss först säkerställa att detta monster är en utvidgning av $\mathbb{Q}$. Men det finns en naturlig avbildning

$$q \in \mathbb{Q} \Longrightarrow [(\dot{q})] = [\underbrace{(q, q, q, \ldots, q, \ldots)}_{\text{konstanta följden.}}]$$

Vi måste också kolla att (1) & (2) är väldefinierade. Med det menar vi att om $[(a_j)] = [(\bar{a}_j)]$ och $[(b_j)] = [(\bar{b}_j)]$

så ska $[(a_j)] + [(b_j)] = [(\bar{a}_j)] + [(\bar{b}_j)]$ och samma för $\times$ och $\div$

$$[(a_j)] > [(b_j)] \Longleftrightarrow [(\bar{a}_j)] > [(\bar{b}_j)]$$

Dvs olika representanter för ekvivalensklasserna ger samma resultat i $+, -, \times, \div$ och $>$.

Men detta är ganska uppenbart. $[(a_j)] = [(\bar{a}_j)]$
$\Rightarrow \lim_{j \to \infty} a_j - \bar{a}_j = 0$

Och $[(a_j)] + [(b_j)] = [(a_j + b_j)] = [(\bar{a}_j + \bar{b}_j)] = [(\bar{a}_j)] + [(\bar{b}_j)]$

om $(a_j + b_j)$ är co-Cauchy med $(\bar{a}_j + \bar{b}_j)$?

summa regeln

$$\lim_{j\to\infty} (a_j + b_j - \bar{a}_j - \bar{b}_j) = \underbrace{\lim_{j\to\infty} a_j - \bar{a}_j}_{=0} + \underbrace{\lim_{j\to\infty} b_j - \bar{b}_j}_{=0} = 0.$$

etc.

Var det där jobbigt? Nu kommer det jobbiga.

<u>Sats</u>: Låt $S \subset \mathbb{R}$ (dvs S består av ekvivalensklasser av Cauchy följder i $\mathbb{Q}$) och S är begränsad från ovan

(dvs. det finns en Cauchy följd $c_j \in \mathbb{Q}$ så att $[(a_j)] \in S \Rightarrow [(a_j)] < [(c_j)] \Rightarrow$ $\exists \delta, N_\delta$ så att $j > N_\delta$ implicerar att $c_j - a_j > \delta > 0$)

och $S \neq \emptyset$.

Då har S en minsta övre begränsning.

Bevis: (Ush vad jobbigt, viktigare att förstå än att kunna alla detaljer...)

Steg 1: Varje $[(a_j)] \in S$ har en representant $(\hat{a}_n)$ som är växande.

Vi kan välja en delföljd a_{j_k} så att $|a_{j_k} - a_{j_l}| < \frac{1}{2k^2}$ för $k, l > k \in \mathbb{N}$

Detta eftersom a_j är Cauchy så för varje $\frac{1}{k} = \varepsilon$ existerar det ett $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ så

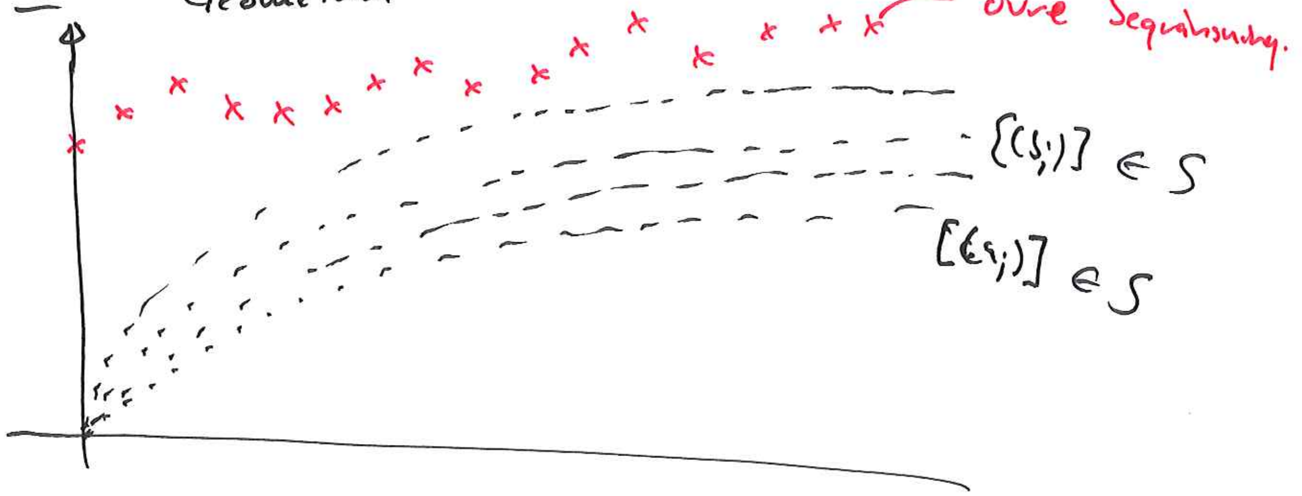
$j, l > N_\varepsilon = N_{1/k} \Rightarrow |a_j - a_l| < \varepsilon = \frac{1}{k}$. Välj $j_k = N_{1/k}$.

Då kommer $a_{j_n} - \frac{1}{n} = \hat{a}_n$ att uppfylla

$$\hat{a}_{n+1} - \hat{a}_n = \underbrace{a_{j_{n+1}} - a_{j_n}}_{< \frac{1}{2n^2}} \underbrace{- \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}_{= \frac{-1}{n(n+1)}} = \frac{n+1-2n}{n(n+1)} \leq 0.$$

Vi kan därför ersätta varje $[(a_j)]$ med en växande repr.

Steg 2 Geometrin



Steg 3 Skapa en minsta övre begränsning

Låt $[(c_j)]$ vara en övre begränsning till S

Då kommer (c_j) att vara en begränsad följd

eftersom (c_j) är Cauchy och därför konvergent och

konvergenta följder är begränsade, säg ~~c_j~~ $c_j \leq b \in \mathbb{N}$.

~~Låt $d_j \in \mathbb{N}$ vara det minsta talet som~~

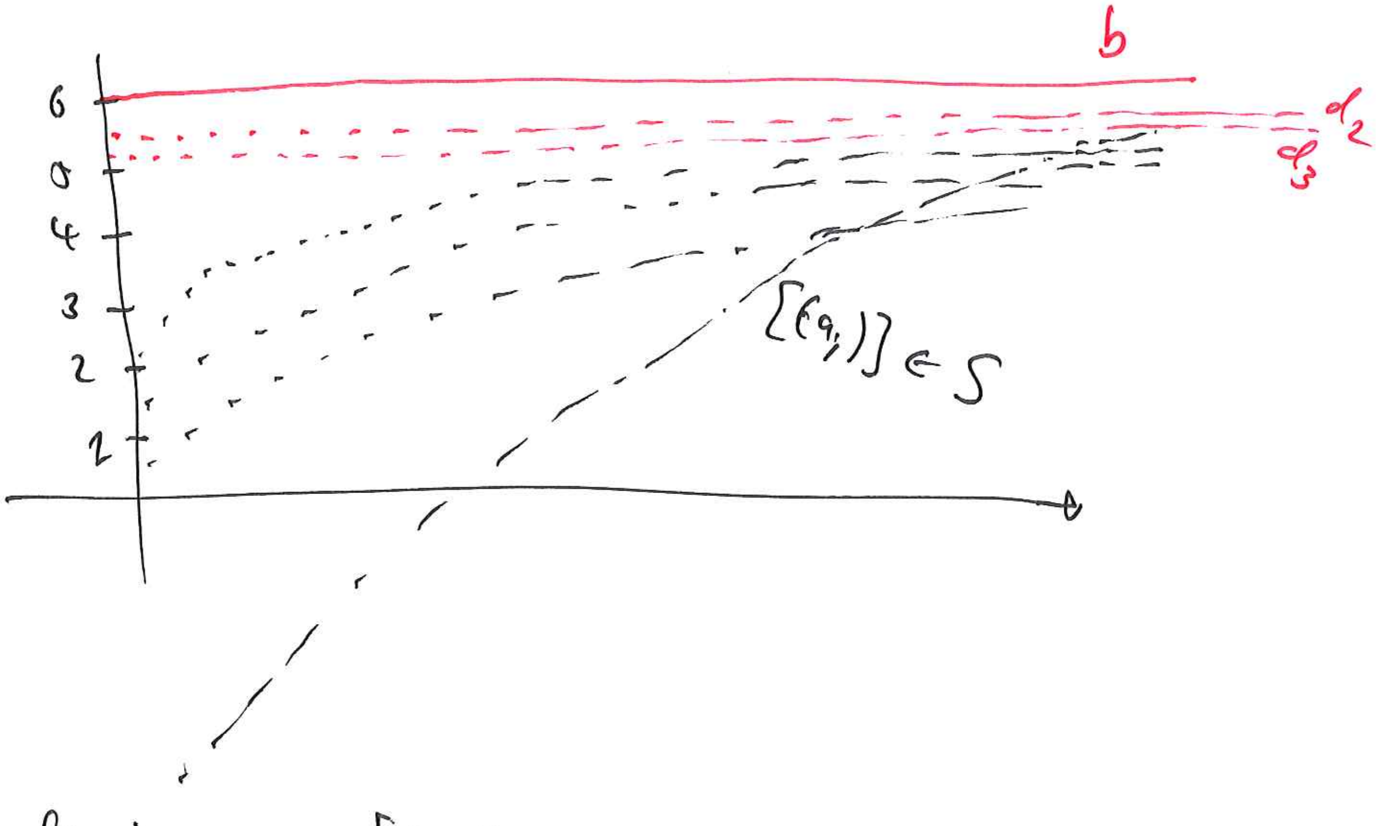
~~Vi kan precis som tidigare anta att (c_j) är växande~~. Låt nu

d_j vara det minsta talet så att $d_j 2^j \in \mathbb{N}$

och $[(d_j)]$ är en övre begränsning till S.

Ett sådant d_j exsisterar eftersom

$[(b)]$ är en övre begränsning.



då kommer $[(d_j)] \geqslant [(a_j)]$ för alla $[(a_j)] \in S$

Så $[(d_j)]$ är en övre begränsning.

~~Antag att~~ Vi måste bevisa att $[(d_j)]$ är en minsta övre begränsning. Antag att $[(e_j)]$ är en annan övre begränsning $[(d_j)] \cancel{\geq} [(e_j)]$ vilket innebär att $\cancel{d_j} - \cancel{e_j} > \delta > 0$ för $j > N_\delta$ men det innebär att, om vi väljer $n \in \mathbb{N}$ så att $2^{-n} < \delta$, $[(d_j - 2^{-n})] > [(e_j)]$ är en övre begränsning. Men det motsäger att d_n var valt så att $d_n 2^n \in \mathbb{N}$ var det minsta sådana tal ~~att~~ så att $[(d_n)] \geq [(a_j)]$ för alla $[(a_j)] \in S$.

$\blacksquare$

Okej, varför gå igenom ett nytt jobbigt bevis för att vi kan komplettera $\mathbb{Q}$ till $\mathbb{R}$?

För att huvudidéen att vi kan definiera punkter som Cauchy följder gäller i alla metriska rum

Sats: Låt M vara ett metriskt rum med metrik d. Då existerar det en komplettering $\hat{M}$.

Idée till ett bevis:

1) Definiera $\hat{M}$ = ekvivalensklassen av Cauchy följder under ekvivalens relationen att $(a_j) \sim (b_j)$ om

$$\lim_{j \to \infty} d(a_j, b_j) = 0.$$

2) Definiera en metrik

$$D([(a_j)], [(b_j)]) = \lim_{j \to \infty} d(a_j, b_j).$$

Visa att den är väldefinierad.

3) Visa att $\hat{M}$ är komplett.

$\blacksquare$

Kommentar: Observera att i fallet $\mathbb{Q}$ så använder vi $>$ istället för metriken som i 2) ovan.