F 7

När vi talar om följder a_j så har vi ordnade mängder, ett element kommer efter det andra. vi kan se en följd som en funktion $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ (eller mer generellt $f: \mathbb{N} \mapsto M$ (metriskt rum). Men ibland kan det vara bra att prata om mängder utan struktur.

$\boxed{\text{Def: Om } S \text{ är en mängd (i } M\text{) och } x \in M \text{ är sådan att för varje } r>0 \text{ så har } M_{r}x \cap S \text{ oändligt många element. Då säger vi att } x \text{ är en hopningspunkt till } S.}$

Sats: 1) Om a är en hopningspunkt till S så finns det en följd $a_j \in S$ så att
$\lim_{j \to \infty} a_j = a$.

2) Om $a_j \in M$ och $a_j \to a$ så är a en hopningspunkt till mängden $\{a_j; j \in \mathbb{N}\}$.

Bevis: Låt $r_0 = 1$ och ~~$a_1 \in M_1 a \setminus \{a\}$~~

$a_1 \in M_1 a \cap S$ så att $a_1 \neq a$ (då

$M_1 a \cap S$ har oändligt många punkter så kan vi alltid välja ett a_1).

Induktivt så kan vi definiera $r_{j+1} = \frac{d(a_j, a)}{2} > 0$ och $a_{j+1} \in M_{r_{j+1}} a \cap S$ så att $a_{j+1} \neq a$.

Då kommer $r_j < \frac{r_{j-1}}{2} < \frac{r_{j-2}}{4} < \ldots < \frac{r_0}{2^j} = \frac{1}{2^j} \to 0$

så $d(a_j, a) < \frac{1}{2^j} \to 0$. a_j är den sökta följden.

2) Om $a_j \to a$ så finns det för varje $r > 0$ ett N_r så att

$$\underbrace{j > N_r}_{\text{oändligt många } j} \Rightarrow d(a_j, a) < r$$

dvs det finns oändligt många a_j så att

$$\{a_{N_r+1}, a_{N_r+2}, \ldots\} \subset M_r a \, .$$

$\blacksquare$

Observera att vi använder inte hela styrkan i antagandet att $M_r a \cap S$ har oändligt många punkter. Vi använder bara att $M_r a \cap S$ har en punkt a_r så att $a_r \neq a$.

Följdsats: Om för varje $r > 0$ $M_r a \cap S$ har en punkt $a_r \neq a$ så kommer
$\exists a_j \to a$, $a_j \in S$ $\Rightarrow$ a är en hopningspunkt.

Bevis: Samma! $\blacksquare$

Vi definierade S som sluten om

$$\left.\begin{matrix} a_j \in S \\ a_j \to a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \in S.$$

Men då följder $a_j \to a$ är så nära besläktade så kan vi definiera sluten ~~med~~ från begreppet hopningspunkt.

Sats: Om S' är mängden av alla hopningspunkter till S. Då är S sluten om och endast om $S' \in S$.

Mer specifikt $\bar{S} = S \cup S'$.

Bevis: S är sluten omm

$S = \bar{S}$. Så om vi kan visa att

$\bar{S} = S \cup S'$ så följer det att

S är sluten omm $S' \subset S$

($S = \bar{S} \Rightarrow S = S \cup S' \Rightarrow x \in S'$ så kommer $x \in S$
så $S' \subset S$

Om $S' \subset S$ så kommer $\underbrace{S \cup S'}_{=\bar{S}} = S$)

Vi måste alltså visa att $\bar{S} = S \cup S'$

dvs $\bar{S} \subset S \cup S'$ ①

$S \cup S' \subset \bar{S}$ ②

① följer av att om $a \in \bar{S}$ så finns det en följd $a_j \in S$ så att $a_j \to a \Rightarrow a \in S$ eller $a \in S'$ } (*)

② Om $a \in S'$ så $\exists a_j \in S$ så att $a_j \to a \Rightarrow a \in \bar{S}$.

Kommentar: Ovanstående bevis är lite kort (har hål?). Måste man nämna att a ligger i S' om $\{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ har oändligt många olika element?

Jag kommer inte att säga något om perfect spaces (inte centralt för analys) eller kontinuitet för aritmetiska operationer section 2.6 (ska ni kunna från envariabelanalysen.)

Kompakthet (Igen)

<u>Definition:</u> Vi säger att en mängd K är täckt av $\mathcal{U} = \{A_j ; A_j \text{ mängder}\}$ Om $K \subset \bigcup A_j$

(A_j kan vara en ouppräkelig mängd av mängder).

Vi säger att en ändlig delmängd av A_j är en ~~end~~ "finite sub-cover" om
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} A_j .$$

<u>Definition:</u> We say that K is covering compact if every open cover ($\mathcal{U} = \{A_j ; A_j \text{ öppna mängder}\}$) has a finite subcover.

<u>Exempel:</u> Låt $K = (0,1)$ och $\mathcal{U} = \{(x-\frac{1}{2}, x+\frac{1}{2}) ; x \in K\}$ vara en täckning av K då är $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{5}{4}) \in \mathcal{U}$ en ~~end~~ "finite subcover" av $(0,1)$.

K är dock inte kompakt eftersom Täckningen $\mathcal{U} = \{(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}) ; n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$ ~~inte~~ täcker K men $\mathcal{U}$ har ingen "finite sub-cover".

Sats: Följande är ekvivalenta för delmängder A av metriska rum

a) A is covering compact

b) A is sequentially compact

Bevis: $[(a) \Rightarrow b))]$ Om a) men inte b) gäller

så $\exists a_j \in A$ så att ingen delföljd konvergerar.
Detta medför att $\{a_j ; j \in \mathbb{N}\}$ inte har någon hopningspunkt $a \in A$. ~~Men de~~

a hopningspunkt $\Rightarrow \forall r > 0$ $M_r a \cap A$ oändligt många punkter.

Så om a inte är en hopningspunkt $\exists r_a > 0$ så att

$M_{r_a} a \cap A$ har ändligt många punkter. i $\{a_j ; j \in \mathbb{N}\}$.

~~Ungefär så långt kommer vi om vi försöker göra ett motsägelseargument~~

Det är detta vi får om vi antar att b) inte gäller. För att få en motsägelse så måste vi använda att a) gäller. ~~För det så gör~~
För att använda a) så måste vi ha en open cover: Mängden $\{M_{r_a} a ; a \in A\}$ är en open cover så vi kan hitta en finite cover

$\{M_{r_1} a_1 , M_{r_2} a_2 , \ldots , M_{r_N} a_N\}$ (skulle $r_k = r_{a_k}$ här)

Där varje $M_{r_k} a_k$ har ändligt många av de oändligt många punkterna $a_0, a_1, a_2, \ldots$

$\Rightarrow$ motsägelse

(oändligt många punkter får inte plats i ändligt antal mängder med ändligt många punkter i varje mängd. ∎

Kommentar: Ovanstående bevis är relativt enkelt.

Vi packar upp definitionen och skriver ut vad de betyder. När vi har rett ut vad inte b) betyder så använder vi definitionen av a) för att skapa en motsägelse.

Det kräver dock lite tankearbete för att packa upp definitionerna på rätt sätt. Här använder vi hopningspunkt karakteriseringen av gränsvärde för att få ändligt/oändligt många punkter i $M_{\lambda_q} a \bigcap A$. Det blir ett mindre tydligt bevis om vi försökte använda ε-δ.

Men med den teori vi har så tror jag att vem som helst med lite träning i matte skulle kunna skriva ner det här beviset om han/hon får tillräckligt mycket tid. Beviset b) $\Rightarrow$ a) är svårare.

Vi behöver ett Lemma

Lemma: Varje öppen övertäckning $\mathcal{U}$ av ett sequentially compact mängd A har ett Lebesgue ~~lemma~~ tal $\lambda > 0$.

Dvs om $a \in A$ så finns det något $U \in \mathcal{U}$ så att $M_\lambda a \subset U$.

Bevis: Låt $\mathcal{U}$ vara en öppen övertäckning av A som inte har ett Lebesgue tal $\lambda > 0$. Då kan vi hitta punkter $a_j \in A$ så att ingen mängd $U \in \mathcal{U}$ innehåller $M_{1/j}\, a_j$, dvs $M_{1/j}\, a_j \not\subset U$.

A sequentially compact $\Rightarrow$ $a_j \to a \in A$. Då $a \in A$ så måste $a \in U_a \in \mathcal{U}$ för något U_a.

eftersom U_a är öppen så kommer det att finnas ett $r>0$ så $M_r a \subset U_a$.

Vi hävdar att $M_{\frac{1}{j}} a_j \subset U_a$ vilket ger en motsägelse till $M_{\frac{1}{j}} a_j \not\subset U \subset \mathcal{U}$ för något U.

Välj ~~j~~ j så stort att $d(a_j, a) < \frac{r}{2}$ och $\frac{1}{j} < \frac{r}{2}$. Då kommer

$$M_{\frac{1}{j}} a_j \subset M_r a \subset U.$$

(Enkelt!)
Svårigheten är att se att detta implicerar satsen

Bevis [b) ⟹ a)]

Låt $\mathcal{U}$ vara en öppen övertäckning till A.

Vi måste visa att $\mathcal{U}$ har en ändlig delövertäckning.

Välj $a_1 \in A$ då ligger $M_\lambda a_1 \subset U_1 \in \mathcal{U}$

→ Lebesgue nummer λ

för något U_1. Fortsätt induktivt att välja

$$a_{n+1} \in A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} U_j \quad \text{och} \quad U_{n+1} \text{ så } M_\lambda a_{n+1} \subset U_{n+1}$$

(1)

då kommer $d(a_j, a_k) \geq \lambda > 0$ för ~~[illegible]~~ $j, k \leq n+1$

Då A är följdkompakt så kommer $a_{n_k} \to a_0$ för någon delsekvens. ⟹ a_{n_k} är Cauchy

⟹ $d(a_{n_k}, a_{n_\ell}) < \frac{\lambda}{2}$ för $k, \ell > N_{\lambda/2}$

vilket motsäger (1)