F6 Nu har vi en hyfsad förståelse av vad en kompakt mängd är. Men vi vill veta hur "begreppet kompakt" relaterar till andra begrepp vi har, specifikt kontinuitet och homeomorfi.

Hur avbildas kompakta mängder ~~med~~ av kontinuerliga funktioner?

Finns det homeomorfier mellan kompakta och icke kompakta mängder?

Sats: Om $f: M \mapsto N$ är kontinuerlig och $K \subset M$ är kompakt så är $f(K) \subset N$ kompakt.

Bevis: Enkelt. Vi vill visa att varje följd $y_j \in f(K)$ har en ~~konv~~ konvergent delföljd.

Vad vet vi om ~~x_j~~ $y_j \in f(K)$?
Att det finns ett $x_j \in K$ så att $f(x_j) = y_j$.
Men K är kompakt så $\exists\, x_{j_k} \to x_0 \in K$
Vi vill visa att $y_j = f(x_j)$ har en konv. delföljd. Men $y_{j_k} = f(x_{j_k}) \underbrace{\longrightarrow}_{f \text{ är kont.}} f(x_0) = y_0$.

Så y_{j_k} ~~har en konverge~~ är en konvergent delföljd av y_j. Men vi behöver visa att y_0 ~~f(K)~~ ligger i $f(K)$ men det följer av att $x_0 \in K$. $\blacksquare$

Följdsats: Om K kompakt och $f: K \to \mathbb{R}$ är kontinuerlig. Då kommer f att vara begränsad, och anta sina max/min värden

Bevis: Enl. föregående så är $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, dvs sluten och begränsad (enl. Heine-Borels Sats). Slutna begränsade mängder i $\mathbb{R}$ har max och min värden. $\blacksquare$

Varför? Ta 3 minuter.

1) Måste använda l.u.b. property.

Och homeomorfier?

$\boxed{\text{Sats: Om } M \text{ är kompakt och homeomorf med } N \text{ så är } N \text{ kompakt}}$

Följdsats: $\underbrace{[0,1]}_{\text{kompakt}}$ inte homeomorf med $\underbrace{\mathbb{R}}_{\text{~~inte~~ kompakt.}}$

Det här är ganska tråkigt. Men det finns vissa intressanta satser som följande.

$\boxed{\text{Sats: Om } f \text{ är en kontinuerlig bijektion } \underbrace{M}_{M \text{ kompakt}} \to N \text{ då är inversen } f^{-1} \text{ också kontinuerlig (} f \text{ är en homeomorfi).}}$

Bevis: Vi vill visa att om $y_j \to y_0$ så kommer $\underbrace{f^{-1}(y_j)}_{x_j} \to \underbrace{f^{-1}(y_0)}_{=x_0}$.

Eftersom M är kompakt så kommer ~~vara~~ det att finnas en delföljd $x_{j_k} \to p$. Om vi kan visa att $p = x_0$ så är vi klara.

~~kommer vara~~ men eftersom f är kontinuerlig så kommer

$$\begin{array}{ccc} f(x_{j_k}) & \to & f(p) \\ \| & & \| \\ y_{j_k} & \to & y_0 = f(x_0) \end{array}$$

Gränsvärden unika

så $f(p) = f(x_0) \underset{f \text{ injektiv}}{\Longrightarrow} p = x_0$.

Så $x_{j_k} \to x_0$.

Men detta är sant för alla konvergente delföljder.

$\boxtimes$

Nästa sats är också en klassiker.

$$\boxed{\text{Sats: Om } f(x): \underbrace{K}_{\text{kompakt}} \to \mathbb{R} \text{ är kontinuerlig då är } f \text{ likformigt kontinuerlig.}}$$

Bevis: Vi vill visa att det för alla $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ så att

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| < \delta_\varepsilon \\ x, y \in K \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Vet inte hur man gör så vi argumenterar via motsägelse.

Antag att det finns ett $\varepsilon > 0$ så att det inte finns något $\delta_\varepsilon > 0$ så att (1) gäller. Då är $\frac{1}{j}$ inte ett sådant δ_ε så vi kan hitta

$$\left.\begin{array}{l} |x_j - y_j| < \frac{1}{j} \\ x_j, y_j \in K \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x_j) - f(y_j)| > \varepsilon$$

Då K är kompakt så existerar det en delföljd $x_{j_k} \to x_0$. Observera att

$$|x_0 - y_{j_k}| \leq \underbrace{|x_0 - x_{j_k}|}_{\to 0} + \underbrace{|x_{j_k} - y_{j_k}|}_{< \frac{1}{j_k} \to 0} \to 0$$

så $y_{j_k} \to x_0$. ~~Blir den nästan kommer~~ Vi behöver ~~detta för att~~ skapa en motsägelse ur detta.

Vi har ännu inte använt att f är kontinuerlig. (2)

dvs $\exists \delta_{\varepsilon/2} > 0$ så att $|x - x_0| < \delta_{\varepsilon/2} \Rightarrow |f(x_0) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Men för $k >> 0$ så kommer $|x_0 - x_{j_k}| < \delta_{\varepsilon/2}$ (3)

$|x_0 - x_{j_k}| < \delta_{\varepsilon/2}$

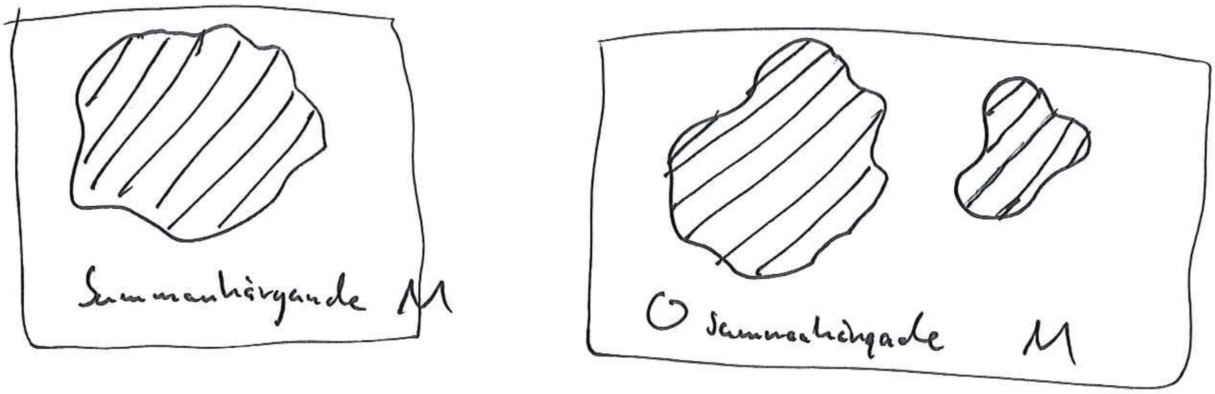
vilket gör att

$$|f(x_{j_k}) - f(y_{j_k})| \leq \underbrace{|f(x_{j_k}) - f(x_0)|}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{pga. (2) \& (3)}}} + \underbrace{|f(x_0) - f(y_{j_k})|}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \text{p.g.a. (2) \& (3)}}} < \varepsilon$$

Vilket motsäger (1). ■

Vi ska nu byta ämne totalt och prata om sammanhängande mängder.

Intuitivt så tänker vi på en mängd



Frågan är hur vi ~~[illegible]~~ uttrycker detta * matematiskt. Uppenbarligen så har den osammanhängande mängden flera delar och varje del är både sluten och öppen (dvs clopen) som delmängder av M.

Definition: Vi säger att M är osammanhängande om $M = A \sqcup A^c$ där A och A^c är icke tomma clopen mängder i M.

Sats: Om $f: M \to N$ är kontinuerlig och surjektiv då är N sammanhängande. om M är.

Bevis: Om f är kont. ~~då tomma~~ och $N = \underbrace{A \sqcup A^c}_{\text{clopen} \neq \emptyset}$,

dvs N inte sammanhängande.

Då kommer $\underbrace{f^{-1}(A)}$ och $\underbrace{f^{-1}(A^c)}$ ~~icke tomma f surj~~

att vara clopen i M.

Specifikt

$f^{-1}(A)$ är öppen då A är det (A clopen)

$$f^{-1}(A) = M \setminus \underbrace{f^{-1}(A^c)}_{\text{öppen}} \quad \text{är sluten.}$$

Och $f^{-1}(A)$ är icke-tom eftersom f är surjektiv.

<u>Följdsats</u>: (Generaliserade medelvärdessatsen.)

$f: M \to \mathbb{R}$, M sammanhängande f kont.

Om $f(x)=\alpha$ & $f(y)=\beta$ så kommer f att antaga alla värden γ så att $\alpha < \gamma < \beta$.

<u>Bevis</u>: Antag motsatsen att $f(x) \neq \gamma$ $\forall x \in M$.

då kommer
$$M = \underbrace{\{x \in M;\ f(x) < \gamma\}}_{f^{-1}(-\infty,\gamma)\ \text{open}} \sqcup \underbrace{\{x \in M;\ f(x) > \gamma\}}_{\underbrace{f^{-1}(\gamma,\infty)}_{\text{open}}}.$$

Men $A = f^{-1}(-\infty,\gamma)$ (och $A^c = f^{-1}(\gamma,\infty)$) måste också

vara slutna för om $x_j \in A$ och $x_j \to x_0$

då kommer $f(x_0) = \lim\limits_{x_j \to x_0} \underbrace{f(x_j)}_{<\gamma} \leq \gamma$ men $f(x_0) \neq \gamma$

så $f(x_0) < \gamma \Rightarrow x_0 \in A$ så A är sluten.

A^c sluten visas på samma sätt.

Sats $\mathbb{R}$ är sammanhängande.

Bevis: Antag att $U \subset \mathbb{R}$ är clopen och låt $p \in U$. Eftersom U är öppen så finns det ett litet intervall $(p-r_0, p+r_1) \subset U$.

Vi vill visa att $(p-r_0, p+r_1) \subset U$ för alla $r_0, r_1 \geq 0$. dvs att möjliga r_0 och r_1 inte har någon övre begränsning

Kontinuitetsmetoden:

Låt $X = \{ r \in \mathbb{R}^+ ; [p, p+r) \subset U \}$

$X \neq \emptyset$ eftersom $r_1 \in X$.

Om X inte är övre begränsad så kommer $(p, \infty) \subset U$ (och vi är klara). Så antag att X är begränsad då kommer $\text{l.u.b}\, X = a$ att existera.

U är sluten så $p+a \in U \Rightarrow [p, p+a] \subset U$

U är öppen så $(p+a-\varepsilon, p+a+\varepsilon) \subset U$ för något $\varepsilon > 0$

Så $[p, p+a] \cup (p+a, p+a+\varepsilon) = [p, p+a+\varepsilon) \subset U$

$\Rightarrow$ a är inte en minsta övre begränsning till X så X är inte begränsad från ovan.
så $[p, \infty) \subset U$

För att visa att $(-\infty, p] \subset U$ argumenterar man på samma sätt.

Så $(-\infty, p] \cup [p, \infty) = \mathbb{R} \subset U \subset \mathbb{R} \Rightarrow U = \mathbb{R}$ $\square$

Exempel:  inte homeomorf med 

Om så var fallet så finns det en homeomorfi $f:$  $\longmapsto$  .

kont bijek
kont invers

Vilket ger en homeomorfi $\hat{f}:$  $\longmapsto$ 

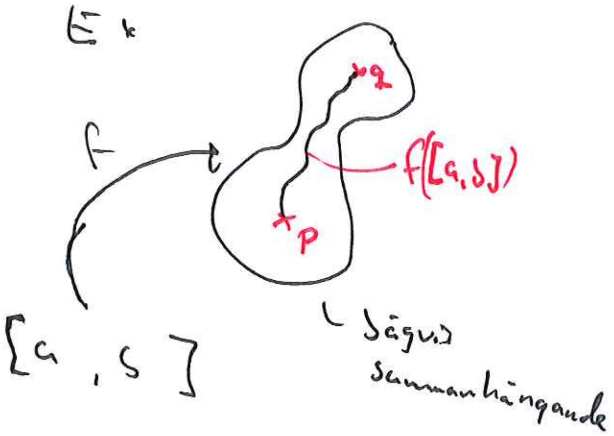
kont, bijek, kont invers: $\hat{f}^{-1}$ är kontinuerlig

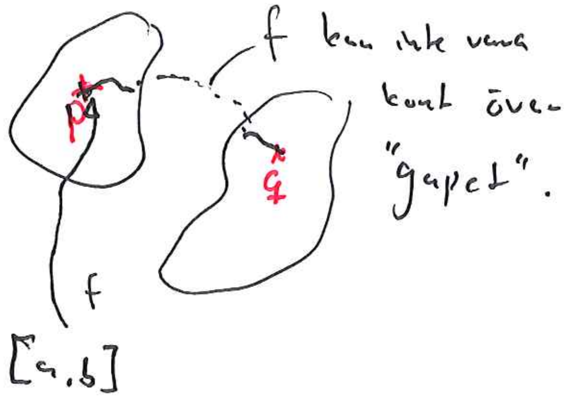
nu  sammanhängande $\Longrightarrow$  sammanhängande

vilket inte är fallet.

Def: (path connected) Vi säger att M är bågvis sammanhängande om det för varje $p, q \in M$ finns en kontinuerlig avbildning $f:[a,b] \longmapsto M$ så att $f(a)=p$ och $f(b)=q$

Ex

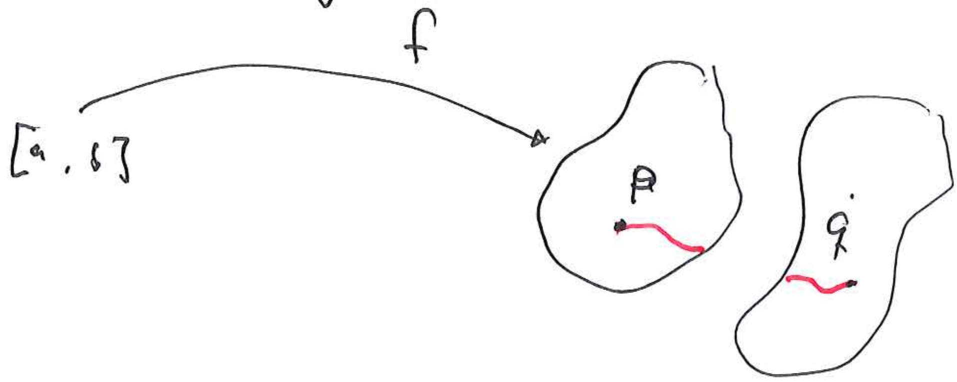




Sats: Om M är bågvis sammanhängande så är M sammanhängande

Bevis: Antag att M inte är sammanhängande ~~då~~ och visa att M inte är bågvis sammanhängande.

Så $M = A \sqcup A^c$. Låt $p \in A$ och $q \in A^c$. Om M var bågvis sammanhängande så skulle det finnas en avbildning



f är kont. och $[a,b]$ kompakt.
Så $f([a,b])$ är kompakt.

$f : [a,b] \longmapsto f([a,b])$ kont. bijektion mellan två kompakta $\Rightarrow$ $f : [a,b] \longmapsto f([a,b])$ är en homeomorfi. Men $f([a,b]) = \underbrace{(A \cap f([a,b])) \sqcup (A^c \cap f)}_{B \sqcup B^c}$

där B och B^c är clopen i sig själva.
Så $f([a,b])$ är inte sammanhängande men homeomorf med $[a,b]$ sammanhängande. Motsägelse
$\Rightarrow$ M inte bågvis sammanhängande. $\boxed{}$