Föreläsning 6
Reglerteknik AK

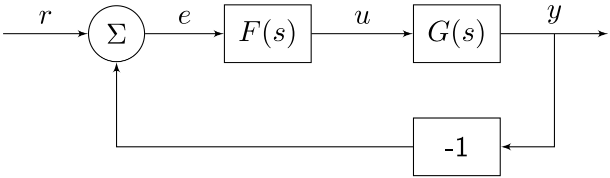
©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

14 september, 2016

Introduktion

Förra gången:

- Regulatorkonstruktion

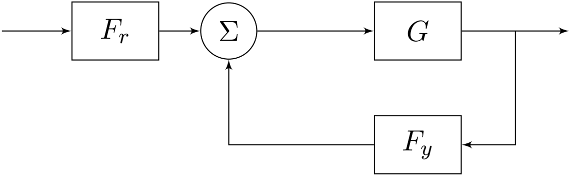


Målet är att bestämma F så att $y \approx r$.
Systematisk PID/Lead-lag konstruktion

Dagens program:

- Känslighet och robusthet

Känslighet och robusthet



Om $F_r = F_y = F \Rightarrow$ tidigare schema.

Många val av F_r och F_y ger samma slutna system.

Känslighet och robusthet

Example

1. Med $F_r = F_y = F$ fås

$$\Longrightarrow G_c = \frac{GF}{1+GF}$$

2. Med öppen styrning $(F_y = 0)$ och $F_r = \frac{F}{1+GF}$ fås

$$\Longrightarrow G_c = \frac{GF}{1+GF}$$

Känslighet och robusthet

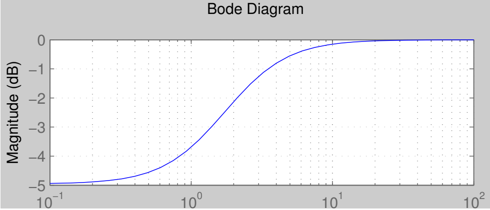
Fördelar med återkoppling:

- Återkoppling minskar inverkan av störningar

$$Y = \frac{GF_r}{1+GF_y}R + \underbrace{\frac{1}{1+GF_y}}_{\text{känslighetsfunktionen}} V$$

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)F_y(s)}$$

Vi får liten inverkan av störningar med frekvenser där $|S(i\omega)|$ är liten.



Känslighet

Om kretsförstärkningen $|F_y(i\omega)G(i\omega)|$ är stor

$$\Leftrightarrow$$

känslighetsfunktionen $|S(i\omega)|$ är liten.

Example

$$F_y(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_I}\frac{1}{s}\right]$$

$$\Rightarrow |S(0)| = 0$$

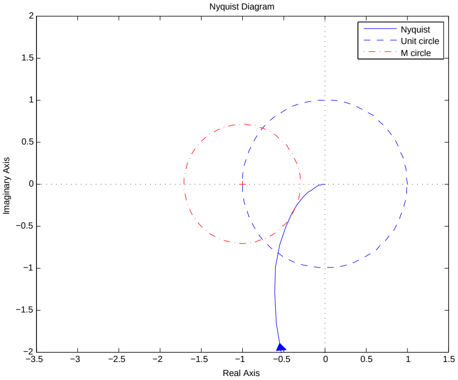
dvs. PI-reglering eliminerar inverkan av stegstörnigar i stationärt tillstånd.

Känslighet

Mer exakt

$$|S(i\omega)| = \left|\frac{1}{1+G(i\omega)F_y(\omega)}\right| \leq M_s \;\Leftrightarrow\; |G(i\omega)F_y(\omega)-(-1)| \geq \frac{1}{M_p}$$

Nyquistkurvan måste vara utanför en cirkel med mittpunkt i -1 och radie $1/M_s$



Robusthet

- Återkoppling minskar inverkan av vissa typer av modellfel

  Modell: $G(s)$

  Verklighet: $G^0(s) = G(s)\left[1 + \Delta G(s)\right]$

  Vi kan lösa ut $\Delta G(s) = \frac{G^0(s) - G(s)}{G(s)}$ och ser att det är ett *relativt fel*.

  $\boxed{\text{Vad händer då man återkopplar det } \textbf{verkliga} \text{ systemet?}}$

Robusthet

Återkopplar vi det **verkliga** systemet får vi:

$$Y^0 = \frac{G^0 F_r}{1 + G^0 F_y} R = .. = \left[1 + S^0 \Delta G\right] Y$$

$$\Rightarrow \Delta Y = \frac{Y^0 - Y}{Y} = S^0 \Delta G$$

där $S^0(s) = \frac{1}{1+G^0(s)F_y(s)}$.

Modellfel, $\Delta G(i\omega)$, får liten inverkan

om den **verkliga känslighetsfunktionen** $|S^0(i\omega)|$ är liten.

Robusthet

Example

PI-reglering $\Rightarrow S^0(0) = 0$

Eliminerar inverkan av felaktig statisk förstärkning, $G^0(0)$.

Vid "små" modellfel har vi att

$$S^0 \approx S = \frac{1}{1 + GF}$$

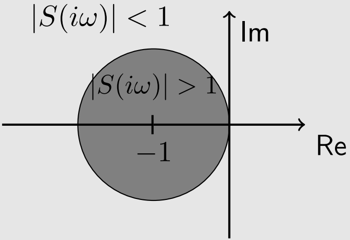
Example

För fallet $F_y = F_r = F$ fås

$$G_c(s) + S(s) = \underbrace{\frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)}}_{\approx 1} + \underbrace{\frac{1}{1 + G(s)F(s)}}_{\Rightarrow \approx 0} = 1$$

Bra val!

Nyquistdiagram och $S(i\omega)$ (jmf M_s-cirkeln)):



Känslighet och robusthet

Nackdelar med återkoppling:

- Hög kretsförstärkning ökar risken för instabilitet, speciellt vid modellfel (robusthet)

- Kräver eventuellt stora styrsignaler.

$$U = -\frac{F_y}{1+GF_y}V \approx -\frac{1}{G}V$$

  om GF_y är stor.

  Krävs en stor styrsignal för att eliminera störningar i frekvensband där $|G(i\omega)|$ är liten.

- Mätbrus (fel)!

Bodes Integral (1945)

Theorem (Bodes Integral)

Om G_0 har ett relativt gradtal $\geq$ 2 gäller att

$$\boxed{\int_0^\infty \log|S(i\omega)|\,\mathrm{d}\omega = \pi\big(p_1 + .. + p_m\big)}$$

där $p_1, .., p_m$ är polerna till $G_0(s)$ i H.H.P.

Observera att detta är oberoende av regulator.

Beviset bygger på integration av

$$\log S(i\omega) = \underbrace{\log|S(i\omega)|}_{\text{jämn fkn}} + i\,\underbrace{\arg S(i\omega)}_{\text{udda fkn}}$$

Robusthet

Modell: $G(s)$, antag stabil

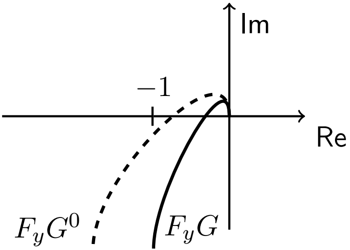
Verklighet: $G^0(s) = G(s)\big[1 + \Delta_G(s)\big]$, antag stabil

Nominellt återkopplat system: $\frac{GF_r}{1+GF_y}$, antag stabilt

Fråga: Är det verkliga återkopplade systemet stabilt?

Robusthet

För att svara på denna fråga kan vi bland annat använda Nyquistkriteriet.



$$F_y G^0 = F_y G\left[1 + \Delta_G\right] = F_y G + F_y G \Delta_G$$

Kravet är att $F_y G^0$ ej får omsluta -1.

OK om avståndet mellan $F_y G$ och $F_y G^0$ är mindre än avståndet mellan $F_y G$ och -1.

Robusthet

Detta ger kravet att

$$|F_y(i\omega)G^0(i\omega) - F_y(i\omega)G(i\omega)| < |F_y(i\omega)G(i\omega) - (-1)|$$

$$\Rightarrow |F_y(i\omega)G(i\omega)\Delta_G(i\omega)| < |F_y(i\omega)G(i\omega) + 1|$$

Som omformulerat ger det så kallade ***Robusthetskriteriet*** från 1978

$$\Rightarrow \boxed{\frac{|F_y(i\omega)G(i\omega)|}{|1 + F_y(i\omega)G(i\omega)|} < \frac{1}{|\Delta_G(i\omega)|} \quad \forall\, \omega}$$

Robusthet

Definera den komplementära känslighetsfunktionen:

$$T(s) = \frac{F_y(s)G(s)}{1 + F_y(s)G(s)} = 1 - S(s)$$

Normalt är Δ_G ej känd, men en övre uppskattning är given

$$|\Delta_G(i\omega)| \leq g(\omega) \quad \forall\, \omega$$

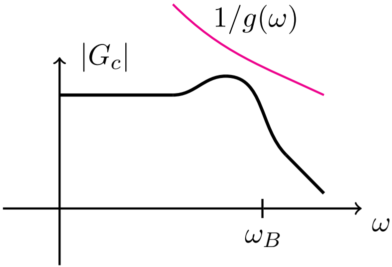
Det verkliga slutna systemet är då stabilt om

$$|T(i\omega)| < \frac{1}{g(\omega)} \quad \forall\, \omega$$

Vilket är ett tillräckligt villkor, men ofta ej nödvändigt.

Robusthet

Observera att om $F_y = F_r = F$ så är $T = G_c$.



Begränsar möjlig bandbredd.

Robusthet

Example

Antag att

$$G^0(s) = G(s) \underbrace{\frac{\alpha}{s+\alpha}}_{1+\Delta_G(s)}$$

Genom identifikation ser vi att

$$\Delta_G(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha} - 1 = -\frac{s}{s+\alpha}$$

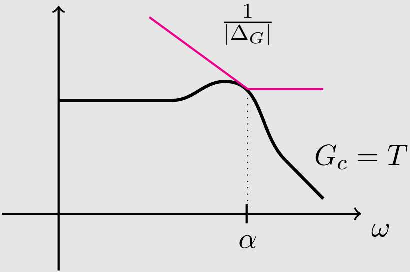
och

$$\frac{1}{\Delta_G(s)} = -\frac{s+\alpha}{s}$$

har brytpunkter vid 0 (-1) och α $(+1)$

Robusthet

Example (fort.)



Desto långsammare försummad dynamik (α), desto lägre möjlig bandbredd.
Alternativt: Modellera bättre!