R ~~X~~ 5 | L52

~~Sist~~ Förra föreläsningen så visade vi att

Om $\mathcal{T}$ är alla öppna mängder i ett metriskt rum M ($\mathcal{T}$ är en topologi) så gäller

a) Om $A_j \in \mathcal{T}$ så $\bigcup_j A_j \in \mathcal{T}$

b) $A_j \in \mathcal{T}, 1 \le j \le N \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{N} A_j \in \mathcal{T}$

c) ~~$\emptyset \in M$ och $M \in M$~~

$\emptyset \in \mathcal{T}$ $\quad M \in \mathcal{T}$

Här klantade jag mig. Hävdade att detta inte var sant!
Det är sant!!!

Def: ~~$\emptyset$~~ A är öppen om

$$x \in A \Rightarrow \exists r \text{ så } M_r x \subset A.$$

där $M_r x = \{\underbrace{y \in M}; d(x,y) < r\}$

enligt definitionen så kommer $M_r x \subset A$!

Vi har definierat kont. med ε-δ men intressant nog så kan vi definiera kontinuitet m.h.a. endast öppna mängder.

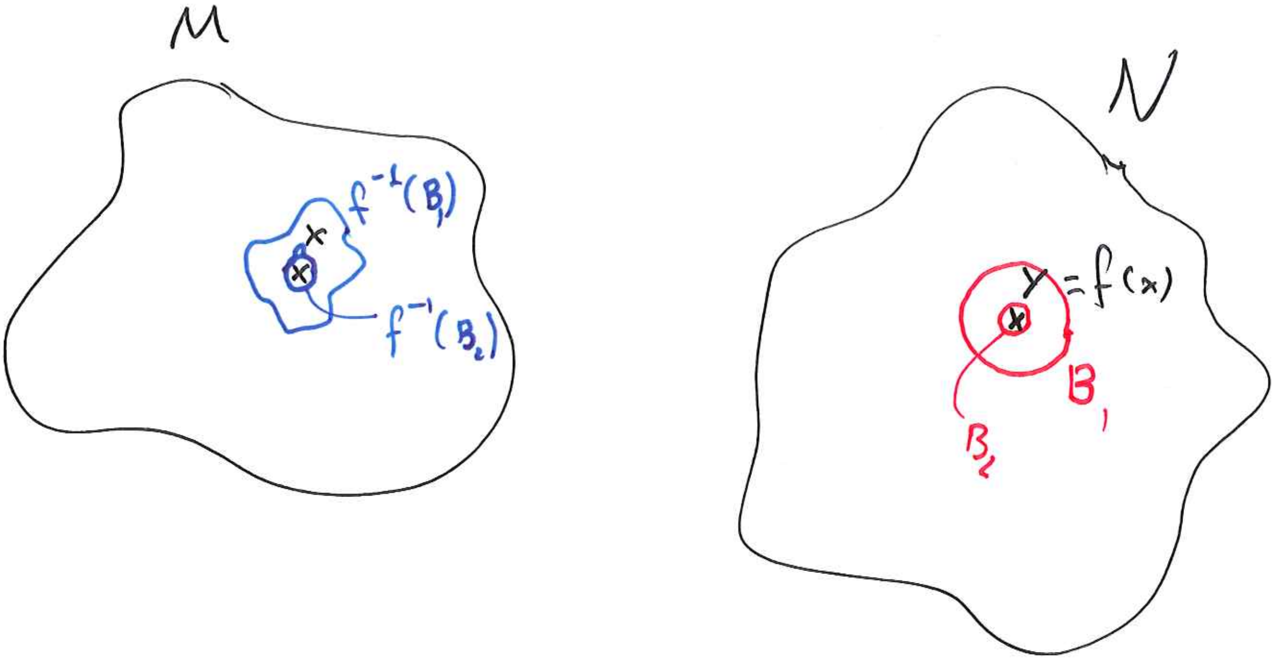
<u>Def</u>: Låt M och N vara topologiska ~~rum~~ rum (dvs $\exists\, \mathcal{T}_M$ & $\mathcal{T}_N$ som är topologier på M och N.

Då säger vi att $f: M \mapsto N$ är kontinuerlig om ~~det~~ för varje $B \in \mathcal{T}_N$

$$f^{-1}(B) = \{x \in M;\ f(x) \in B\} \in \mathcal{T}_M$$

(kallar detta för öppna mängd def. av kontinuitet)

Tanken med definitionen



<u>Sats</u>: Om M och N är metriska rum så är $f: M \mapsto N$ kont. med ovanstående definition omm f är kontinuerlig med ε-δ definitionen

<u>Bevis:</u> (öppen mängd def $\Rightarrow$ ε-δ def)

1) För alla $f(x) \in N$ så är $M_\varepsilon f(x)$ öppen

därför (enl. öppna mängd def) så är

$f^{-1}(M_\varepsilon f(x)) \subset M$ öppen.

Då $x \in f^{-1}(M_\varepsilon(f(x)))$ (eftersom $f(x) \in M_\varepsilon(f(x))$)

så kommer det att finnas ett $\cancel{\nu}\,\delta > 0$

så att $M_\delta x \subset f^{-1}(M_\varepsilon(f(x)))$.

Detta betyder att

om $\underbrace{y \in M_\delta x}_{\text{dvs. } d(x,y) < \delta}$ så kommer $\underbrace{f(y) \in M_\varepsilon f(x)}_{d(f(y), f(x)) < \varepsilon}$

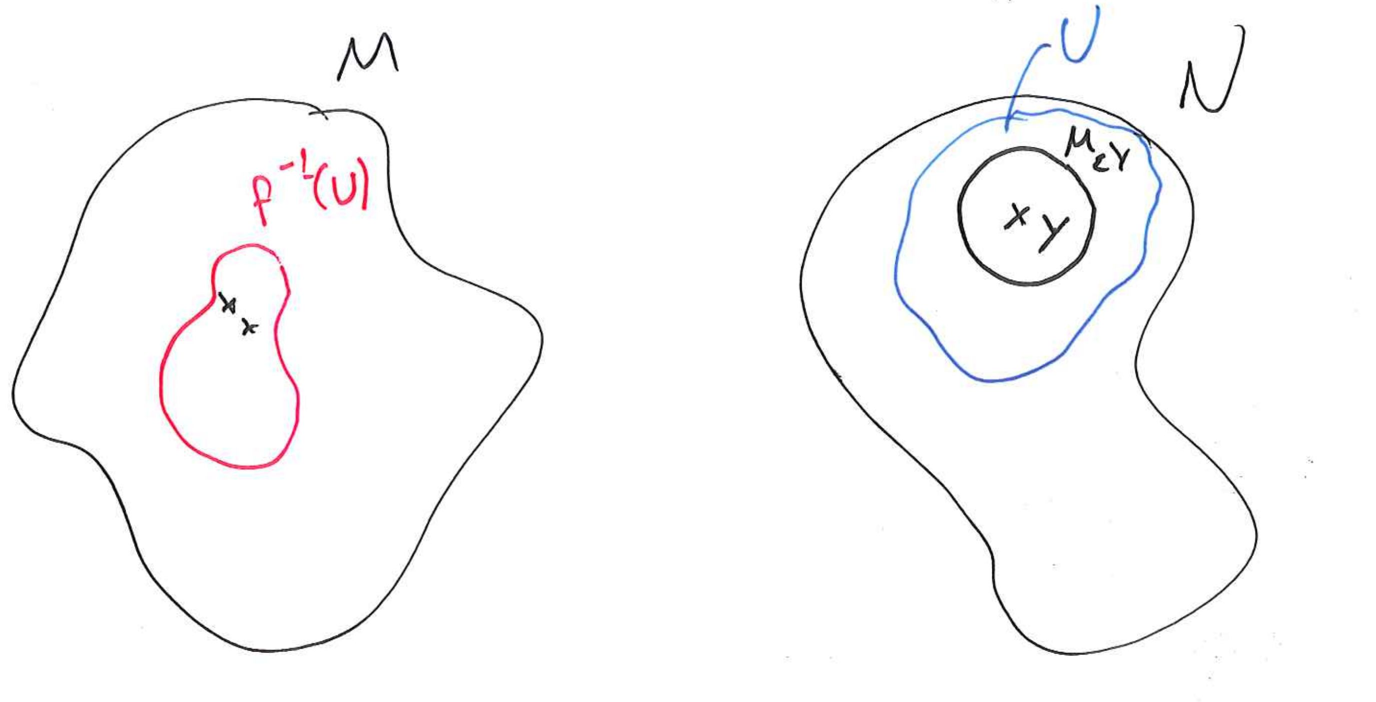
dvs. $d(x,y) < \delta$ — " — $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

#

2) ε-δ $\Rightarrow$ öppen mängd def.

Vi måste visa att om $U \subset N$ är öppen

så kommer $f^{-1}(U) \subset M$ att vara öppen.



Välj ett $y \in U$ och låt

$x \in f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(U)$. Vi måste visa att det finns något $\delta > 0$ så att

$M_\delta x \subset f^{-1}(U)$. (dvs $f^{-1}(U)$ är öppen)

Eftersom U är öppen och $y \in U$ så finns det något $\varepsilon > 0$ så att $M_\varepsilon y \subset U$ (def av U är öppen).

Eftersom f uppfyller ε-δ def. så kommer det att finnas ett $\delta > 0$ så att

$$\begin{aligned} \underbrace{d(z,x) < \delta}_{z \in M_\delta x} \quad &\Longrightarrow \quad d(f(x), f(z)) < \varepsilon \\ &\Longrightarrow \quad f(z) \in M_\varepsilon f(x) \subset U \end{aligned}$$

så alla $z \subset M_\delta(x)$ kommer att ligga i $f^{-1}(U)$

$\Rightarrow \quad M_\delta x \subset f^{-1}(U)$.

$\blacksquare$

En positiv sak med att vi har definierat "metrik" abstrakt är att det är lätt att generalisera

Om X och Y är metriska rum så kan vi definiera $M = X \times Y$ som alla par (x,y), $x \in X$ $y \in Y$ och definiera en metrik på M enl.

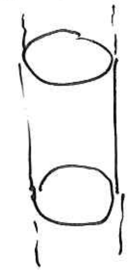
$$d_M((x_1,y_1)\,(x_2,y_2)) = \sqrt{d_X(x_1,x_2)^2 + d_Y(y_1,y_2)^2} \qquad (1)$$

Fler alternativ finns.

<u>Exempel</u>: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ har metriken

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{|x_1-x_2|^2 + |y_1-y_2|^2}$$

eller $S_1 \times \mathbb{R}$ metriskt rum.



<u>Sats</u>: Om $M = X \times Y$ med metrik enl. 1

så kommer $(x_j,y_j) \to (x_0,y_0)$

omm $x_j \to x_0$ i d_X-metrik

och $y_j \to y_0$ i d_Y-metrik.

<u>Bevis</u>: Om $(x_j,y_j) \to (x_0,y_0)$ så kommer det för varje $\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon > 0$ så att

$$\left.\begin{matrix} d_X(x_j,x_0) \\ d_Y(y_j,y_0) \end{matrix}\right\} \leq \sqrt{d_X(x_j,x_0)^2 + d_Y(y_j,y_0)^2} < \varepsilon \quad \text{för } j > N_\varepsilon .$$

Om $x_j \to x_0$ och $y_j \to y_0$ $\exists N_{\varepsilon,x}$ & $N_{\varepsilon,y}$ så att

~~$j > N_{\varepsilon,x}$ + och~~

$$j > \max(N_{\varepsilon,x}, N_{\varepsilon,y}) \Rightarrow \sqrt{\underbrace{d_X(x_j,x_0)^2}_{<\varepsilon^2} + \underbrace{d_Y(y_j,y_0)^2}_{<\varepsilon^2}} < \sqrt{2}\,\varepsilon \qquad \blacksquare$$

På samma sätt kan man definiera en metrik på ~~N~~ ~~ett~~ produkten av N st. metriska rum $M = X_1 \times X_2 \times X_3 \times \ldots \times X_N$

$$d_M(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{j=1}^{N} d_{X_j}(x_j, y_j)^2 \right)^{1/2}$$

$\bar{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ $\quad \bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ $\quad x_j \in X_j, \; y_j \in Y_j$.

$\bar{x}$ konvergerar i M omm x_j konvergerar i X_j för $j = 1, 2, \ldots, N$

Vi måste säga något om komplethet.

Kom ihåg att vi sade att x_j är en Cauchy följd ~~sekvens~~ om $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N_\varepsilon > 0$ så att

$$j, k > N_\varepsilon \implies \cancel{|x_j - x_k| < \varepsilon}$$

$$d(x_j, x_k) < \varepsilon$$

FUNKAR på alla metriska rum.

<u>Def</u>: M är komplett om varje Cauchy följd ~~sekvens~~ konvergerar.

<u>Sats</u>: $\mathbb{R}^n$ är komplett.

Bevis: Om $\bar{x}^j \in \mathbb{R}^n$ är Cauchy så $\exists N_\varepsilon$ för $\varepsilon > 0$ så att

$$\Big(\underbrace{|x_l^j - x_l^k|}_{\text{för varje } l = 1, \ldots, n} \le \Big(\sum_{l=1}^{n} |x_l^j - x_l^k|^2 \Big)^{1/2} < \varepsilon \quad \text{för } j, k > N_\varepsilon$$

så för varje $l = 1, \ldots, n$ så är x_l^j Cauchy och därför konvergent till x_l^0 (eftersom $\mathbb{R}$ är komplett)

då $x_l^j \to x_l^0$ för varje l så konvergerar $\bar{x}^j \to (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$

Sats: Varje sluten delmängd av ett komplett mr är komplett (speciellt varje sluten delmängd av $\mathbb{R}^n$)

Bevis: $x_j \in N$, N sluten delmängd av M (komplett)

och x_j Cauchy $\Rightarrow x_j \to x_0$ i M

men $x_0 \in N$ eftersom N är sluten

så $x_j \to x_0$ i N.

$\boxed{3}$

Kommentar: Knepig notation.

Om vi betraktar $N \subset M$ som ett metriskt rum så är ~~M~~ alltid sluten, t.o.m. clopen. Men betraktar vi N som en delmängd av M så kan N vara ~~både~~ öppen, sluten eller ingendera eller clopen.

Knepigt och förvirrande!

Kompakthet.

En av de viktigaste satserna i analysen är Bolzano-Weierstrass:

Sats: [B-W] Om $x_j \in [a,b]$, då existerar det en del~~serie~~följd x_{j_k} så att $x_{j_k} \to x_0 \in [a,b]$.

Kan vi bevisa något liknande för allmänna metriska rum. Vi definierar

Definition: Vi säger att $A \subset M$ (metriskt rum) är kompakt om varje följd $a_n \in A$ har en konvergent delföljd $a_{n_k} \to a \in A$.

(Kompakta mängder är de som uppfyller B-W satsen!

Frågan är om vi kan säga något mer informativt om kompakta mängder

Sats: Om A är kompakt så är A sluten och begränsad

Bevis: A kompakt $\Rightarrow$ A sluten (Som delmängd i M !)

om inte så kan vi hitta en följd $a_n \to a \notin A$ (eftersom annars vore A sluten) men då kommer varje delföljd $a_{n_k} \to a \notin A$.

A kompakt $\Rightarrow$ A begränsad.

Annars så finns det en obegränsad följd $a_n \in A$ ~~och~~ ~~ef~~ $\Rightarrow$ alla delföljder är obegränsade $\Rightarrow$ ingen delföljd är konvergent (eftersom konvergenta följder är begränsade.

$\blacksquare$

Sats Om A och B är kompakta, ~~[illegible]~~ så är $A \times B$ kompakt, d.v.s. om $a_j \in A$ $b_j \in B$ så finns det en delföljd $(a_{j_k}, b_{j_k}) \in A \times B$ som konvergerar till $(a_0, b_0) \in A \times B$.

Bevis: Eftersom A är kompakt så finns det en delföljd av a_j, säg $a_{j_l} \to a_0 \in A$.
Om vi betraktar motsvarande delföljd $b_{j_l} \in B$ så finns det en delföljd $b_{j_{l_k}} \ (= b_{j_k}) \in B$ så att $b_{j_k} \to b_0 \in B$.

Då j_k är en delföljd av j_l så kommer $a_{j_k} \to a_0$ (delföljder av konvergenta följder har samma gränsvärde.)
Därför så kommer $(a_{j_k}, b_{j_k}) \to (a_0, b_0) \in A \times B$. $\blacksquare$

Följdsats: $A_1, A_2 \ldots A_N$ kompakta $\Rightarrow$ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$ kompakt.

Följdsats: ~~Om~~ $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ är kompakt.

Sats: Varje sluten ~~och begränsad~~ mängd av ett kompakt mängd är kompakt

Bevis: Om $A \subset K$ och A är sluten så kommer varje följd $a_j \in A$ att ha en ~~begränsad~~ konvergent delföljd i K $a_{j_k} \to a \in K$. Då A är sluten så kommer $a \in A$ så $a_{j_k} \to a \in A$.

Sats (Heine-Borel) Varje sluten begränsad mängd i $\mathbb{R}^n$ är kompakt

Bevis: Om A är begränsad så $A \subset [-m,m]^n$ (kompakt) för något m. Så A är en sluten delmängd av en kompakt mängd och därför kompakt. $\blacksquare$

Exempel: Låt A och B vara disjunkta icke tomma slutna och begränsade mängder i $\mathbb{R}^n$.
Då existerar det två punkter
$a \in A$ & $b \in B$ så att
$0 < d(a,b) \le d(\hat{a},\hat{b})$ för alla $\hat{a} \in A$ $\hat{b} \in B$.
$\Rightarrow$ vi kan definiera avståndet mellan kompakta mängder. Och det är aldrig lika med noll

Bevis: $d(\hat{a},\hat{b}) \ge 0$ för alla $\hat{a}, \hat{b}$

så $X = \{d(\hat{a},\hat{b});\ \hat{a} \in A, \hat{b} \in B\}$ är icke-tom och begränsad underifrån. $g.l.b(X) = \delta \ge 0$ existerar.

$\delta + \frac{1}{j} > \delta$ inte $g.l.b(X)$ $\Rightarrow$ $a_j \in A$, $b_j \in B$
så $d(a_j, b_j) < \delta + \frac{1}{j}$ $\cancel{\Rightarrow}$ ~~$d(a_j$~~

A & B kompakta $\Rightarrow$ $\exists\, (a_{j_k}, b_{j_k}) \to (a,b) \in A \times B$
och $\delta < d(a_{j_k}, b_{j_k}) < \delta + \frac{1}{j}$ $\Rightarrow \{d \text{ kont.}\} \Rightarrow d(a,b) = \delta$
eftersom $a \in A$ och $b \in B$ som är disjunkta så ~~att~~ $a \neq b$ $\Rightarrow$ $d(a,b) > 0$ $\blacksquare$