21 september, 2016, Föreläsning 6

TILLÄMPAD LINJÄR ALGEBRA

INNEHÅLL

- Algebraiska operationer med matriser.
- Definition och beräkning av inversen av en matris.

1. **Inverterbara matriser**

En matris A är inverterbar om det finns en matris B så att AB och BA är identitetsmatriser. Matrisen B kallas för inversen till A och betecknas med A^{-1}. Notera att endast kvadratiska matriser är inverterbara. Varför det?

2. **Proposition** (Se bland annat *Sats 3.3.9* i Anton & Busby)

(1) Låt A vara en $n \times n$-matris som är inverterbar och låt A^{-1} vara inversen till A. Då $AA^{-1} = I_n$ och $A^{-1}A = I_n$.
(2) Låt A vara en $n \times n$-matris. Om B är en $n \times n$-matris och $AB = I_n$, då är $B = A^{-1}$.
(3) Låt A vara en $n \times n$-matris. Om B är en $n \times n$- matris och $BA = I_n$, då är $B = A^{-1}$.
(4) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om $\text{rang}(A) = n$, dvs, antalet av pivotkolonner är lika med n.
(5) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ bara har en lösning som ges av $\vec{0}$ (triviala lösningen).
(6) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ bara har **en** lösning för alla $\vec{b}$.
(7) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om kolonnerna är linjärt oberoende (**detta återkommer vi till i F8**).

3. **Uppgift.** Bestäm om följande matris A är inverterbar.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

4. **Uppgift.** Avgör genom inspektion om följande homogena system har en icke-trivial lösning och avgör om koefficientmatrisen är inverterbar.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= 0 \\ 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 0 \\ x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

5. **Uppgift.** Hitta alla värden på a för vilka matrisen

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

6. **Proposition** (se *Sats 3.2.7* i Anton & Busby)

En 2×2-matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$ ($ad - bc$ kallas för determinanten av A). I detta fall ges inversen till A av

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

7. **Uppgift.** Bestäm om följande matris A är inverterbar och i så fall hitta inversen A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

8. **Hur kan vi beräkna inversen för en $n \times n$-matris?**

Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Inversen till A är en matris

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

där $\vec{b}_i$ är den i-te kolonnen av B, sådan att

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b1 \end{bmatrix} = I_n$$

Det betyder att $\vec{b}_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$ är en lösning till

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \vec{e}_i$$

Vi kan konstatera att inversen till A kan beräknas på följande sätt (i Anton & Busby *The Inversion Algorithm*);

Använd Gauss-Jordans elimineringsprocess på följande totalmatris (med identitetsmatrisen som högerled)

$$[A \mid I_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

och reducera den till

$$[I_n \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Inversen, A^{-1}, ges av $A^{-1} = B$.

9. **Proposition** (Se *Sats 3.3.5* i Anton & Busby)

Ett linjärt ekvationssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ med n ekvationer och n obekanta kan lösas med hjälp av A^{-1} förutsatt att A är inverterbar. Lösningen ges av $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

10. **Uppgift.** Lös systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

11. **Uppgift.** Verifiera att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

är inversen till

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/5 & 1/30 \\ 1/3 & -1/5 & 1/15 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

Lös sedan systemet

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

12. **Uppgift.** Beräkna lösningen till följande system

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

För vilka vektorer $\vec{b}$ är systemet konsistent?

13. **Uppgift.** Vad gäller för b_1, b_2 och b_3 för att systemet ska vara konsistent?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

14. **Uppgift.** En vektor $\vec{w}$ är en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, och $\vec{v}_4$, om det existerar tal c_1, c_2, c_3, c_4 så att

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4.$$

I följande fall, ställ upp ekvationssystemet för bestämning av c_1, c_2,c_3, c_4. Avgör med hjälp av MATLAB om systemet har någon lösning. Om en lösning finns så lös systemet. I MATLAB beräknar man inversen av en matris med `inv(A)` och ett linjärt ekvationssystem, $A\vec{x} = \vec{b}$ löser man genom att skriva `x=A\b`.

a)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

b)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

15. **Uppgift.** Ta reda på om följande matriser är inverterbara, och i så fall, beräkna inversen (för hand).

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

För uppgift d) - e), använd Matlab.

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$