F4

Idag skall vi gräva ner oss djupare i abstraktion.

Def 1: Vi säger att ~~f~~ $a_j \to a$ då $j \to \infty$ om det finns, för varje $\varepsilon > 0$, ett N_ε så att om $j > N_\varepsilon$ så är avståndet mellan a_j och a mindre än ε.

?

$$\left(j > N_\varepsilon \Rightarrow \underbrace{|a - a_j|}_{\text{avstånd}} < \varepsilon \right)$$

Så om vi kan definiera ett avstånd så kan vi definiera konvergens.

Ex: Vi säger att avståndet mellan två kontinuerliga funktioner $f(x)$ och $g(x)$ definierade på $[a,b]$ är

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

$$f_j \to f \qquad (f_j, f \in C([a,b]) = \{\text{alla kont funk på } [a,b]\})$$

om $\int_a^b |f_j(x) - f(x)|\,dx < \varepsilon$ om $j > N_\varepsilon$

Att definiera begrepp är helt meningslöst om det inte hjälper oss att bevisa intressanta satser! Och att låta "avstånd" vara odefinierat i Def 1 gör att den definitionen inte ger någon mer generalitet. För varje nytt sätt vi definierar "avstånd" så måste vi bevisa om alla satser på nytt

Men om vi kan hitta en essens i avståndsbegreppet och visa satser ~~för~~ som gäller för alla objekt som uppfyller "essensen av att vara ett sätt att mäta avstånd" så kan vi inkludera en uppsjö av olika situationer i en teori.

Definition (metrik, fint ord för avstånd)

~~Vi säger att $d: N$~~

Låt M vara en mängd (t.ex. alla punkter i $\mathbb{R}^n$), då säger vi att $d: M \times M \to \mathbb{R}$ är en metrik på M om

i) $d(x,x) = 0$, $d(x,y) \geq 0$ för alla $x, y \in M$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ — " —

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ — " — $x, y, z \in M$.

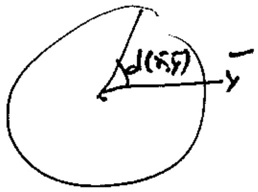
Ex: 1) Låt $d_n(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ för $x, y \in \mathbb{R}^n$

2) Låt $d(x,y) = |x-y|$ — " — $x, y \in \mathbb{R}$

3) Låt $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 = 1\}$

då kommer $d(\bar{x}, \bar{y}) = d_2(\bar{x}, \bar{y})$ att vara en metrik.

och $d(\bar{x}, \bar{y}) =$ vinkeln mellan $\bar{x}$ och $\bar{y}$



att vara två olika metriker på M.

Definition: Vi säger att $f: M \mapsto N$ (där M, N är metriska rum) är kontinuerlig i x_0 om $\lim_{j\to\infty} x_j = x_0$ implicerar att $\underbrace{\lim_{j\to\infty} f(x_j) = f(x_0)}_{d(f(x_0), f(x_j)) \to 0}$.

f är kont. om f är kont i alla $x_0 \in M$

Sats: Om $f: M \mapsto N$ och $g: N \mapsto P$ är kontinuerliga så är $g(f(x)): M \mapsto P$ kont.

Bevis: Låt $x_j \to x_0$ $(x_j, x_0 \in M)$

då kommer $\underbrace{f(x_j)}_{y_j} \to \underbrace{f(x_0)}_{y_0}$ vilket

Eftersom f är kont.

innebär att

$$g(f(x_j)) = g(y_j) \xrightarrow{\left\{ \begin{smallmatrix} g \text{ är} \\ \text{kont} \end{smallmatrix} \right\}} g(y_0) = g(f(x_0)).$$

$\blacksquare$

~~Ex: Låt~~

Förmodligen så är vi vana att se kont. definierade via $\varepsilon-\delta$ definitionen. Men den ~~är~~ ~~samma~~ visar sig vara den samma som den nya definitionen

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Sats: } f: M \to N \text{ är kontinuerlig i } x_0 \in M \\ \text{omm det för varje } \varepsilon > 0 \text{ existerar} \\ \text{ett } \delta_\varepsilon > 0 \text{ så att} \\ \qquad d_M(x,y) < \delta_\varepsilon \implies d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon\end{array}}$$

Bevis: Antag att f är kontinuerlig ~~a~~ - visa att f uppfyller ε-δ -def.

Antag motsatsen dvs att det finns $\varepsilon > 0$ och inte något $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$d_M(y, x_0) < \delta_\varepsilon \implies d(f(x_0), f(y)) < \varepsilon.$$

Eftersom inget sådant δ_ε existerar så är $\frac{1}{j}$ inte ett sådant δ_ε, dvs $\exists x_j$ så att

$$\underbrace{d(x^j, x_0) < \frac{1}{j}}_{\implies x^j \to x^0} \quad \text{och} \quad \underbrace{d(f(x_0), f(x_j)) > \varepsilon}_{\implies f(x_j) \not\to f(x_0)}$$

men om $x^j \to x^0$ så måste $f(x_j) \to f(x_0)$ eftersom f är kontinuerlig.

Antag nu att f uppfyller ε-δ def

~~Vi~~ vill visa att $x^j \to x^0$ ~~(dvs ∃~~ $\Longrightarrow$ $f(x_j) \to f(x_0)$

dvs att om

(1) $\forall \delta > 0$ existerar ett $J_\delta > 0$ så $\overset{j > J_\delta}{)}$ $d(x_j, x_0) < \delta$

implicerar att

(2) $\forall \varepsilon > 0$ — " — $I_\varepsilon > 0$ — " $j > I_\varepsilon \Longrightarrow d(f(x_j), f(x_0)) < \varepsilon$

Nu uppfyller f ε, δ så $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ så

$$j > J_{\delta_\varepsilon} \underset{(1)}{\Longrightarrow} d(x_j, x_0) < \delta_\varepsilon \Longrightarrow d(f(x_j), f(x_0)) < \varepsilon$$

så om $I_\varepsilon = J_{\delta_\varepsilon}$ (vilket existerar!) så

gäller (2).

$\blacksquare$

Låt oss definiera ett nytt begrepp

Def: Låt M & N vara ~~mängder~~ metriska rum (mängder med en metrik)

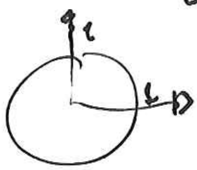
Då säger vi att $f: M \to N$ är en HOMEOMORFI om f är bijektiv, kontinuerlig och $f^{-1}: N \to M$ är kont.

Homeomorfi är det viktigaste begreppet i topologin. ~~En kan~~ Om en homeomorfi existerar mellan M och N så är M och N i någon mening samma (i alla fall i någon mening)

Ex: Är

homeomorfisk med

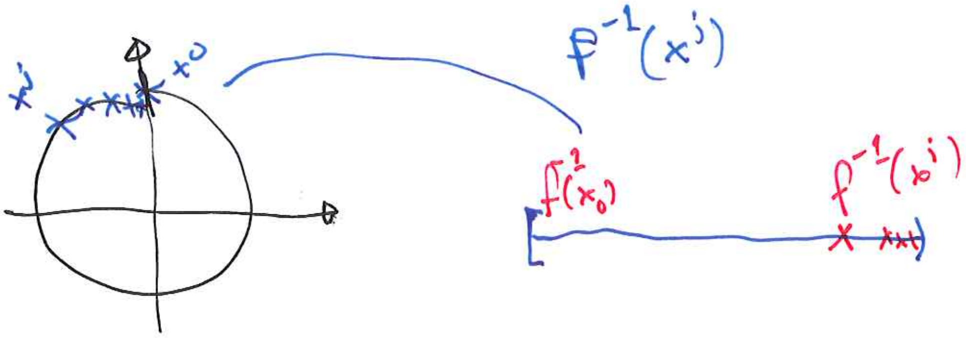
B



Vi kan definitivt hitta en kontinuerlig bijektion

$f(x) = (\sin(x), \cos(x))$ från A till B

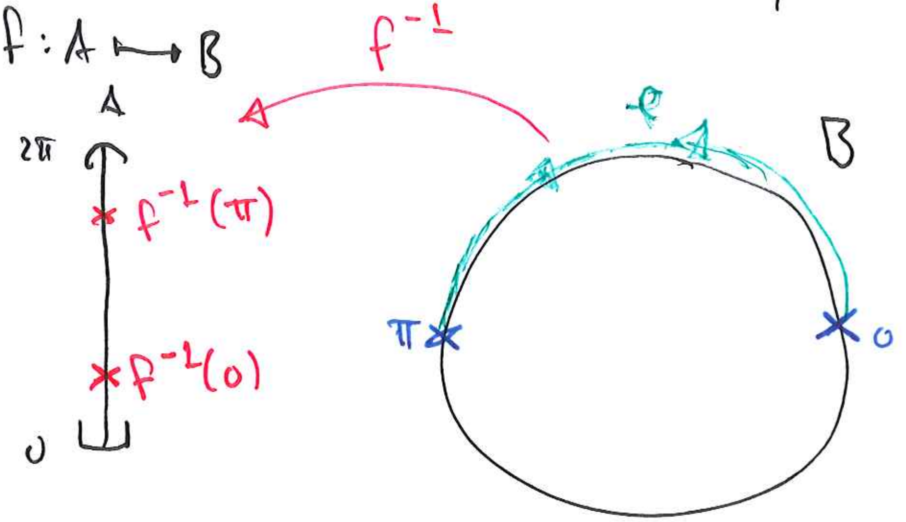
Men inversen är inte kont.



Att den f vi konstruerade inte är en homeomorfi betyder inte att det inte finns någon annan homeomorfi.

För att visa det (sketch av ett bevis i alla fall). så tänker vi oss att det finns en homeomorfi

$f: A \longmapsto B$



Observera att

$$e_1(x) = (\sin(x), \cos(x)) \quad \cancel{\text{avbild}}$$

$$e_2(x) = (\sin(-x), \cos(-x))$$

avbildar $[0,\pi] \longmapsto B$ så att vi får två "vägar" från 0 till π i B och dessa "vägar" har inga andra gemensamma punkter än 0 och π. Därför så måste $f^{-1}(e_1(x))$ och $f^{-1}(e_2(x))$ vara två "vägar" från $f^{-1}(0)$ till $f^{-1}(\pi)$ som <u>inte har några gemensamma punkter</u> förutom start och slutpunkt. Vidare så är $f^{-1}(e_1(x))$ och $f^{-1}(e_2(x))$ kontinuerliga (f^{-1} och e_i är det) så enligt satsen om mellanliggande värden så antar $f^{-1}(e_1(x))$ och $f^{-1}(e_2(x))$ alla punkter mellan $f^{-1}(0)$ och $f^{-1}(\pi)$

Motsägelse!

Definition: En mängd är ~~öppen~~ sluten om den innehåller alla sina gränsvärdespunkter: (hopningspunkter)

Dvs. om $x_j \in S$ och $x_j \to x_0$ så $x_0 \in S$.

Definition: En mängd är öppen om det för alla $x \in S$ exsisterar ett $r > 0$ så att

$$d(x,y) < r \Rightarrow y \in S.$$

Exempel: 1) (a,b) är ett öppet intervall (öppen mängd)

Observera att om $x \in (a,b)$ så kommer $y \in (a,b)$ om $|x-y| < \min(|a-x|, |b-x|) = r$.

2) $[a,b]$ är en sluten mängd.

Sats: Om S är öppen så är $S^c = \{x\,;\, x \notin S\}$ sluten. Om S är sluten så är S^c öppen.

Bevis: S öppen $\Rightarrow$ S^c sluten. Om $x_j \in S^c$ och $x_j \to x_0 \subset S$ så finns det ett ~~område~~ $r>0$ så så alla x, $d(x,x_0) < r$, uppfyller $x \in S \Rightarrow x^j \in S$ om j är stort nog. MOTSÄGELSE

S sluten $\Rightarrow$ S^c öppen.

Om S^c inte är öppen så $\exists x_0 \in S^c$ så att $M_{1/j}\, x_0 \not\subset S^c$ för något j, dvs $\exists x_j \in M_{1/j}\, x_0 \setminus S^c$

dvs $x_j \in M_{1/j}(x_0) \cap S$, $d(x_j, x_0) < \frac{1}{j} \to 0$ så

$x_j \to x_0$ men då kommer $x_0 \in S$ eftersom S är sluten.

<u>Sats/Def:</u> Topologin τ för en mängd M består av alla öppna mängder. Vidare så

Def av en topologi:

i) Om $A_j \subset \tau$ så $\bigcup_{j \geq 1}^{\infty} A_j \subset \tau$

ii) $A_j \subset \tau$, ändligt antal A_j, $\bigcap_{j=1}^{N} A_j \subset \tau$

iii) $\emptyset, M \subset \tau$

i) om $\cancel{x}_0 \in \bigcup_j A_j$ så $x_0 \in A_k$ för något k

$\Rightarrow \exists r > 0$ så $M_r(x_k) \subset A_k \subset \bigcup_{j=1} A_j$

ii) $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{N} A_j \Rightarrow M_r(x_0) \subset \bigcap A_j$

om r = minsta (r_j) där $M_{r_j}\, x_0 \subset A_j$.

iii) Trivial. Eller inte alls sann!

~~[illegible]~~

Följdsats: Om B_j är slutna mängder så

$\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ vara sluten

$\bigcup_{j=1}^{N} B_j$ är sluten

ändligt

Bevis: B_j sluten $\Rightarrow$ B_j^c öppen

$\Rightarrow$ $\underbrace{\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^c}_{\substack{= \text{alla } x \\ \text{så att } x \notin B_j \\ \text{för minst ett } j.}}$ öppen $\Rightarrow$ $\underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j^c\right)^c}_{\text{komplement av öppen}} = \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ = sluten

$\blacksquare$

En viktig ~~dels~~ sak med öppna mängder är att vi kan använda öppna mängder för att definiera kontinuitet.

Def (Topologisk def av kontinuitet): Låt M och N vara mängder så att ~~[illegible]~~ $\mathcal{T}_M$ och $\mathcal{T}_N$ är Topologier på M och N. Då säger vi att

$f: M \to N$

är kontinuerlig om ~~[illegible]~~ för varje $B \subset \mathcal{T}_N$

$f^{-1}(B) \subset \mathcal{T}_M$.

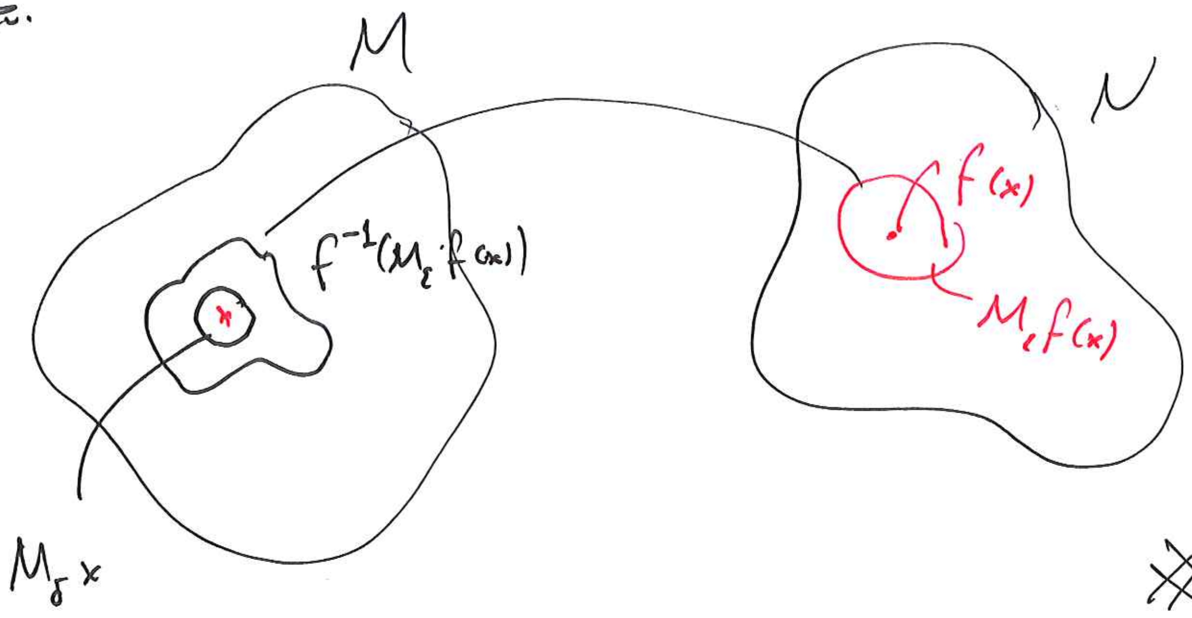
Sats: Ovanstående def implicerar ε-δ def för kont.
Och ε-δ implicerar ovanstående def

Bevis: (öppen mängd def $\Rightarrow$ ε-δ). Observera att för varje $f(x) \in N$ så är $M_\varepsilon f(x)$ öppen.

Enligt öppen mängd def så är $f^{-1}(M_\varepsilon f(x))$ öppen. Vidare så $x \in f^{-1}(M_\varepsilon f(x))$ eftersom $f^{-1}(M_\varepsilon f(x))$ är öppen så finns det ett $\delta > 0$ så att $M_\delta x \subset f^{-1}(M_\varepsilon f(x))$

$$\Rightarrow \underbrace{y \in M_\delta x}_{d(x,y) < \delta} \Rightarrow f(y) \in M_\varepsilon f(x)$$
$$\Rightarrow d(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

~~Bev.~~



2) ε-δ implicerar öppen def. Låt $U \subset N$ vara öppen då kommer det för varje $x \in f^{-1}(U)$ att finnas $M_{\varepsilon_x} f(x) \subset U \Rightarrow \exists \delta_{\varepsilon_x} > 0$ så $f(M_{\delta_\varepsilon} x) \subset M_{\varepsilon_x} f(x)$

Därför kommer $V = \bigcup_{x \in f^{-1}(U)} M_{\delta_{\varepsilon_x}} x$ att vara en öppen så $f(V) = U$ och $V = f^{-1}(U)$