21 september, 2016, Föreläsning 6

Tillämpad linjär algebra

Innehåll

- Algebraiska operationer med matriser.
- Definition och beräkning av inversen av en matris.

Förra gången

1. Följande tabell av reella tal kallas för en $n \times k$-matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

$n \times 1$-matrisen $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ är en (kolonn)vektor i $\mathbb{R}^n$.

$1 \times k$-matrisen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{bmatrix}$$

är en (rad)vektor.

En matris kallas för en **kvadratisk matris** om antalet av rader är lika med antalet kolonner ($n = k$).

Följande $n \times n$-matris kallas för **identitetsmatrisen** och betecknas med I_n

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

2. Vad kan vi göra med matriser?

- Om två matriser har samma storlek kan vi addera (eller subtrahera) dem. Låt A och B vara $n \times k$ matriser (n rader och k kolonner)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1k}+b_{1k} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2k}+b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nk}+b_{nk} \end{bmatrix}$$

$$A-B=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1k}-b_{1k} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2k}-b_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}-b_{n1} & a_{n2}-b_{n2} & \cdots & a_{nk}-b_{nk} \end{bmatrix}$$

- Vi kan multiplicera en matris med ett reellt tal c

$$cA=\begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1k} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ca_{n1} & ca_{n2} & \cdots & ca_{nk} \end{bmatrix}$$

- Vi kan ta **transponatet** av en $n \times k$-matris A och få en $k \times n$-matris A^T

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \qquad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{nk} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1k} & a_{2k} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Notera att den i-te raden i A^T är lika med den i-te kolonnen i A och den i-te kolonnen i A^T är lika med den i-te raden i A.

Exempel:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

och:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

3. **Uppgift.** Låt

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Beräkna $A+B$, $B+A$ och $3A-2B$.

Läs om kommutativa och associativa lagar för addition, *Sats 3.2.1* i Anton & Busby.

IDAG

4. Matrismultiplikation

Låt A vara en $n \times k$-matris

$$A = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

där $R_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \end{bmatrix}$ är den i-te raden i A. Låt B vara en $k \times m$-matris,

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

där $B_i = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ki} \end{bmatrix}$ är den i-te kolonnen i B. Notera att för alla i och j så är B_i och R_j^T vektorer i $\mathbb{R}^k$. Det betyder att vi kan beräkna skalärprodukten mellan dem, $R_j^T \cdot B_i$. Matrismultiplikationen mellan A och B är den $n \times m$ matris som ges av

$$AB = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^T \cdot B_1 & R_1^T \cdot B_2 & \cdots & R_1^T \cdot B_m \\ R_2^T \cdot B_1 & R_2^T \cdot B_2 & \cdots & R_2^T \cdot B_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_n^T \cdot B_1 & R_n^T \cdot B_2 & \cdots & R_n^T \cdot B_m \end{bmatrix}$$

Vad gäller för storleken på matriserna A och B för att multiplikationen mellan A och B ska vara definierad?

5. **Uppgift.** Låt:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Är matrismultiplikationen AB definierad? Är matrismultiplikationen BA definierad? I det fall den är definierad, beräkna produkten.

6. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Beräkna AB, BA, BC och CB.

7. **Uppgift.** Låt A vara $n \times k$ matris. Bevisa att:

$$I_n A = A \qquad AI_k = A$$

där I_n och I_k är identitet matriser .

Notera att

- Att produkten AB är definierad är ingen garanti för att BA är definierad.
- Både AB och BA kan vara definierade men de kan ha olika storlek.
- Både AB och BA kan vara definierade men AB är inte nödvändigtvis lika med BA.

8. **Proposition** (Se *Sats 3.2.2* och *Sats 3.2.10* i Anton & Busby).

Låt A och D vara $n \times k$-matriser, låt B vara en $k \times m$-matris och C vara en $m \times l$-matris. Då gäller bland annat följande

(1) $(AB)C = A(BC)$. Vilken storlek har den resulterande produkten?
(2) $(A + D)B = AB + DB$
(3) $(A^T)^T = A$
(4) $(AB)^T = B^T A^T$.
(5) $(A + D)^T = A^T + D^T$.
(6) $(A - D)^T = A^T - D^T$.
(7) $(cA)^T = c(A^T)$.

9. Matrismultiplikation och linjära ekvationer

Betrakta en $n \times k$-matris A och en $k \times 1$-matris $\vec{x}$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$$

Matrismultiplikationen $A\vec{x}$ ges av

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots a_{1k}x_k \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots a_{2k}x_k \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots a_{nk}x_k \end{bmatrix}$$

vilket betyder att vi kan skriva ett system av linjära ekvationer

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_k & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_k & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}x_k & = & b_n \end{array}$$

på följande sätt

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

där $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

10. Proposition (se *Sats 3.1.5*, i Anton & Busby)

Låt A och B vara $n \times k$-matriser, låt $\vec{x}$ och $\vec{y}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^k$ samt låt c vara ett reell tal. Då gäller att

(1) $A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}$.
(2) $A(c\vec{x}) = c(A\vec{x}) = (cA)\vec{x}$.
(3) $(A + B)\vec{x} = A\vec{x} + B\vec{x}$.

11. Inre och yttre matrisprodukt

Om $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är två kolonnvektorer av samma storlek så är

- $\vec{u}^T\vec{v}$ en inre matrisprodukt. Vad blir storleken på produkten? Känner vi igen detta sedan tidigare?
- $\vec{u}\vec{v}^T$ en yttre matrisprodukt. Vad blir storleken på produkten?

12. **Uppgift.** Låt

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna $A\vec{x}$.

13. **Uppgift.** Låt

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Beräkna $\vec{u}^T\vec{v}$ samt $\vec{u}\vec{v}^T$.

14. **Inverterbara matriser**

En matris A är inverterbar om det finns en matris B så att AB och BA är identitetsmatriser. Matrisen B kallas för inversen till A och betecknas med A^{-1}. Notera att endast kvadratiska matriser är inverterbara. Varför det?

15. **Proposition** (Se bland annat *Sats 3.3.9* i Anton & Busby)

(1) Låt A vara en $n \times n$-matris som är inverterbar och låt A^{-1} vara inversen till A. Då $AA^{-1} = I_n$ och $A^{-1}A = I_n$.
(2) Låt A vara en $n \times n$-matris. Om B är en $n \times n$-matris och $AB = I_n$, då är $B = A^{-1}$.
(3) Låt A vara en $n \times n$-matris. Om B är en $n \times n$- matris och $BA = I_n$, då är $B = A^{-1}$.
(4) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om $\text{rang}(A) = n$, dvs, antalet av pivotkolonner är lika med n.
(5) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ bara har en lösning som ges av $\vec{0}$ (triviala lösningen).
(6) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om systemet $A\vec{x} = \vec{b}$ bara har **en** lösning för alla $\vec{b}$.
(7) En $n \times n$-matris A är inverterbar om och endast om kolonnerna är linjärt oberoende (**detta återkommer vi till i F8**).

16. **Uppgift.** Bestäm om följande matris A är inverterbar.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

17. **Uppgift.** Avgör genom inspektion om följande homogena system har en icke-trivial lösning och avgör om koefficientmatrisen är inverterbar.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \\ & & & & & & x_4 & = & 0 \end{array}$$

18. **Uppgift.** Hitta alla värden på a för vilka matrisen

$$\begin{bmatrix} a & a & a \\ 1 & a & a \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

är inverterbar.

19. **Proposition** (se *Sats 3.2.7* i Anton & Busby)

En 2×2-matris $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ är inverterbar om och endast om $ad - bc \neq 0$ ($ad - bc$ kallas för determinanten av A). I detta fall ges inversen till A av

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

20. **Uppgift.** Bestäm om följande matris A är inverterbar och i så fall hitta inversen A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

21. **Hur kan vi beräkna inversen för en $n \times n$-matris?**

Låt

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Inversen till A är en matris

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_n \end{bmatrix}$$

där $\vec{b_i}$ är den i-te kolonnen av B, sådan att

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b1 \end{bmatrix} = I_n$$

Det betyder att $\vec{b_i} = \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix}$ är en lösning till

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1i} \\ b_{2i} \\ \vdots \\ b_{ni} \end{bmatrix} = \vec{e_i}$$

Vi kan konstatera att inversen till A kan beräknas på följande sätt (i Anton & Busby *The Inversion Algorithm*);

Använd Gauss-Jordans elimineringsprocess på följande totalmatris (med identitetsmatrisen som högerled)

$$[A \,|\, I_n] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

och reducera den till

$$[I_n \,|\, B] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right]$$

Inversen, A^{-1}, ges av $A^{-1} = B$.

22. **Proposition** (Se *Sats 3.3.5* i Anton & Busby)

Ett linjärt ekvationssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ med n ekvationer och n obekanta kan lösas med hjälp av A^{-1} förutsatt att A är inverterbar. Lösningen ges av $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

23. **Uppgift.** Lös systemet

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

24. **Uppgift.** Verifiera att

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

är inversen till

$$A = \begin{bmatrix} 1/6 & 2/5 & 1/30 \\ 1/3 & -1/5 & 1/15 \\ 1/6 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

Lös sedan systemet

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ 4 \end{bmatrix}$$

25. **Uppgift.** Beräkna lösningen till följande system

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 8x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_1 + 8x_3 &= -6 \end{aligned}$$

För vilka vektorer $\vec{b}$ är systemet konsistent?

26. **Uppgift.** Vad gäller för b_1, b_2 och b_3 för att systemet ska vara konsistent?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ x_1 + x_3 &= b_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

27. **Uppgift.** En vektor $\vec{w}$ är en linjärkombination av vektorerna $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, och $\vec{v}_4$, om det existerar tal c_1, c_2, c_3, c_4 så att

$$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3 + c_4\vec{v}_4.$$

I följande fall, ställ upp ekvationssystemet för bestämning av c_1, c_2,c_3, c_4. Avgör med hjälp av MATLAB om systemet har någon lösning. Om en lösning finns så lös systemet. I MATLAB beräknar man inversen av en matris med `inv(A)` och ett linjärt ekvationssystem, $A\vec{x} = \vec{b}$ löser man genom att skriva `x=A\b`.

a)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

b)

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix},$$

28. **Uppgift.** Ta reda på om följande matriser är inverterbara, och i så fall, beräkna inversen (för hand).

$$a)\ A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b)\ A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

För uppgift d) - e), använd Matlab.

$$d)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad e)\ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$