13 september, 2016. Föreläsning 4

Tillämpad linjär algebra

Innehåll

- System av linjära ekvationer och dess lösningar.
- Matriser.
- Gauss-Jordan-eliminering, pivot och fria variabler.

1. Följande ekvation kallas för linjär i k variabler

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = b$$

där a_i är ett reellt tal.

En samling av linjära ekvationer kallas för ett system av linjära ekvationer

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3k}x_k & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}x_k & = & b_n \end{array}$$

Detta system består av n ekvationer med k variabler. Om $b_i = 0$ för alla i kallas systemet för **homogent**.

2. **Uppgift.** Ställ upp det linjära ekvationssystem vars lösning är tre reella tal som uppfyller följande

1. Summan av de tre talen blir 12.
2. Två gånger det första talet, plus det andra talet, plus två gånger det tredje talet blir 5.
3. Det tredje talet är det första talet plus ett.

3. **Uppgift.** Ställ upp det linjära ekvationssystem vars lösning bestämmer om vektorn $\vec{v} = (4, 4, 6, 2)$ är en linjärkombination av följande vektorer, $\vec{u}_1 = (3, 0, -1, 2), \vec{u}_2 = (1, 1, 1, 1), \vec{u}_3 = (2, 3, 0, 2)$ och $\vec{u}_4 = (-1, 2, 5, 0)$.

Följande *tabeller* av reella tal kallas för systemets **koefficientmatris** eller **totalmatris**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \quad \text{eller} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \end{array}\right]$$

I matriserna ovan motsvarar kolonnerna variablerna och raderna motsvarar ekvationerna.

4. **Uppgift.** Hur ser totalmatriserna ut för uppgift 2 och 3?

Bestäm lösningen till

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

betyder att lösa

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & = & 0 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3k}x_k & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}x_k & = & 0 \end{array}$$

Bestäm lösningen till

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \end{array}\right]$$

betyder att lösa

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}x_k & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}x_k & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & + & a_{3k}x_k & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}x_k & = & b_n \end{array}$$

5. I den här kursen, är vårt mål att fundera på följande frågor

- Hur uppkommer ett system av linjära ekvationer?
- Hur kan vi lösa ett system av linjära ekvationer?
- Hur kan vi numeriskt lösa ett system av linjära ekvationer?
- Hur kan vi tolka lösningen geometriskt?
- När saknar systemet lösningar?
- När har systemet **en** unik lösning?
- När har systemet oändlig många lösningar, och i sådant fall hur kan vi bedöma storleken av mängden av alla lösningar?

6. System av linjära ekvationer i två variabler

- Betrakta en linjär ekvation i 2 variabler, $ax + by = c$.
  - Om $a \neq 0$ och/eller $b \neq 0$, då är lösningen till $ax + by = c$ en linje som är vinkel rätt mot $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. ($\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ är en normalvektor till linjen).
  - Om $a = b = 0$ och $c \neq 0$, då har ekvationen $0 = c$ inga lösningar.
  - Om $a = 0$ och $b = 0$ och $c = 0$, då har ekvationen $0 = 0$ alla par (x, y) av reella tal som en lösning.
- Betrakta följande system av linjära ekvationer i 2 variabler

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array} \quad \text{eller} \quad \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right]$$

  Antag att $a_{11} \neq 0$ och/eller $a_{12} \neq 0$ och $a_{21} \neq 0$ och/eller $a_{22} \neq 0$. Lösningen till detta systemet är snittet av linjerna som ges av $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ och $a_{21}x + a_{22}y = b_2$. Den kan vara
  - En punkt om linjerna inte är parallella.
  - Tom (ingen lösning) om linjerna är parallella och är olika.
  - En linje om ekvationerna har samma lösning.
- Betrakta följande system av linjära ekvationer i 2 variabler

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x & + & a_{n2}y & = & b_n \end{array} \quad \text{eller} \quad \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n \end{array}\right]$$

  Lösningen till systemet är snittet av linjerna som ges av varje ekvation i systemet.

Notera att

- Lösningen kan vara tom, eller
- Det finns bara en lösning, eller
- Det finns oändligt många lösningar.

7. System av linjära ekvationer i tre variabler

- Betrakta en linjär ekvation i 3 variabler, $ax + by + cz = d$.
  - Om $a \neq 0$ och/eller $b \neq 0$ och/eller $c \neq 0$, då är lösningen till $ax+by+cz = d$ ett plan som är vinkelrätt mot $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$. ($\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ är en normalvektor till planet).
  - Om $a = b = c = 0$ och $d \neq 0$, då har ekvationen $0 = d$ inga lösningar.

  - Om $a = b = c = d = 0$, då har ekvationen $0 = 0$ alla tripplar (x, y, z) av reella tal som en lösning.
- Betrakta följande system av linjära ekvationer i 3 variabler

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x & + & a_{12}y & + & a_{13}z & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & + & a_{23}z & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x & + & a_{n2}y & + & a_{n3}z & = & b_n \end{array} \quad \text{eller} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & b_n \end{array}\right]$$

  Antag att varje ekvation representerar ett plan i $\mathbb{R}^3$. Lösningen till systemet är snittet av alla plan. Den kan vara
  - Ett plan.
  - En linje.
  - En punkt.
  - Tom.

Notera att vi även i det här fallet har följande möjligheter

- Lösningen kan vara tom, eller
- Det finns bara en lösning, eller
- Det finns oändligt många lösningar.

8. Betrakta en matris

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Den kallas för en $n \times k$-matris (n är antalet rader och k är antalet kolonner).

Vi kan också skriva matrisen som

$$\begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

där $C_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$ är i-te kolonnen av matrisen och $R_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} \end{bmatrix}$ är i-te raden av matrisen.

9. **Uppgift.** Lös systemet i uppgift 2 ovan.

10. **Uppgift.** Lös följande system:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

11. **Uppgift.** Lös följande system:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -2 & 4 & 10 \\ 3 & -3 & 6 & 15 \end{array}\right]$$

12. Vi kan använda följande operationer, som kallas **elementära radoperationer**, på ett system av linjära ekvationer

- Byta plats på två ekvationer.
- Multiplicera en ekvation med ett reellt tal som är inte 0.
- Addera en ekvation till en annan ekvation.

Notera att **elementära radoperationer inte ändrar systemets lösningsmängd.**

13. **Gauss-Jordan-eliminering.** Om vi använder Gauss-Jordan's elimineringsprocess (elementära radoperation) på nedanstående system

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & b_n \end{array}\right]$$

kommer vi fram till ett system som ser ut på följande sätt

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \cdots & 0 & & 0 & * & \cdots & * & b'_1 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & b'_i \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{i+1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_n \end{array}\right]$$

Vi säger att matrisen är på **reducerad trappstegsform**. Variablerna som motsvarar kolonnerna med ettor kallas för **pivotvariabler**. Kolonnerna kallas för pivotkolonner. De andra variablerna kallas för **fria** och motsvarande kolonnerna kallas för fria kolonner. Antalet pivotkolonner kallas för systemets **rang**.

Notera att

- Om systemet på trappstegsform innehåller en ekvation där $0 = b$ och $b \neq 0$, då har (det ursprungliga) systemet inga lösningar. Systemet är **inkonsistent**.
- Om systemet **inte** innehåller en ekvation där $0 = b$ och $b \neq 0$ då har systemet minst en lösning. Systemet är **konsistent**.
  - Om det **inte** finns fria variabler, då har systemet bara **en** unik lösning.
  - Om det finns fria variabler har systemet har oändlig många lösningar.

Vi kan konstatera:

(1) Antag att systemet **har en lösning**. Om systemet har flera variabler än ekvationer ($k > n$), då har det oändlig många lösningar.
(2) Rangen av ett system med n ekvationer och k variabler kan inte vara större än n eller k.
(3) $k =$ rangen + antalet fria variabler.
(4) Systemet har lösning för alla $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ om och endast om rangen $= n$.
(5) Systemet har lösning för alla $\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ om och endast om antalet pivotkolonner (eller pivotvariabler) är lika med antalet ekvationer n.
(6) Om rangen $= k$ då har systemet en unik lösning eller inga lösningar.
(7) Om systemet har en unik lösning då är alla kolonner pivotkolonner.
(8) Ett homogent system har altid en lösning som ges av nollvektor, $\vec{0}$.

14. **Uppgift.** Kan ett system med 3 ekvationer och 5 variabler ha rang 4?

15. **Uppgift.** Transformera följande system till reducerade trappstegform och beräkna rangen och antalet fria variabler. Lös sedan systemet.

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & -1 & 3 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 6 & 5 & -1 & 12 \end{array}\right]$$

16. **Uppgift.** Bestäm ett värde på a så att följande system bara har en lösning:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & a & 6 & 1 \\ 2 & a & a+8 & 4 \end{array}\right]$$

17. **Uppgift.** Hitta a, b, och c så att följande systemet inte har några lösningar:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 7 & 3 & a \\ 1 & 1 & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 9 & 2 & c \end{array}\right]$$

18. **Uppgift.** Visa att om $ad - bc \neq 0$ då blir den reducerade trappstegsformen av

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. **Uppgift.** *Från KS I, 100913, SF1624*

För varje tal a har vi ett linjärt ekvationssystem med tre okända x, y och z som ges av

$$\begin{aligned} (a-3)y =& 1 \\ 2x - ax + ay - 3y + 2z - az =& 1 \\ (4-2a)x + (2a-6)y + 5z - 2az =& 3 \end{aligned}$$

Visa att systemet har en unik lösning om och endast om $a \neq 2$ och $a \neq 3$. Lös sedan systemet då $a = 2$.

20. **Uppgift.** *Från Tenta, 140520, SF1624*

För varje givet tal a har vi följande ekvationssystem i tre okända x, y och z

$$\begin{aligned} 2x + 9y + 4z &= 3 \\ -2x + 7y + 2z &= 1 \\ 2x + y + (a^2 - 1)z &= 1 \end{aligned}$$

(a) Avgör om $(1, 1, 1)$ är med i lösningsmängden när $a = 0$.
(b) Bestäm lösningsmängden när $a = 2$.
(c) Bestäm för vilka värden på a som systemet har en unik lösning, saknar lösning, respektive har oändligt många lösningar.

21. **Uppgift.** *Från KS I, 111208, SF1624*

(a) Bestäm den reducerade trappstegsformen av matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$$

(b) Bestäm rangen av matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

22. **Uppgift.** Använd MATLAB för att lösa systemet från uppgift 3.

23. **Uppgift.** Ta MATLAB-kommandot `rref` till hjälp för att lösa följande system

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 + 15x_6 &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 &= 6 \end{aligned}$$