Föreläsning 3:

Vi sade att A och B har samma kardinalitet om det finns en bijektion från A till B.

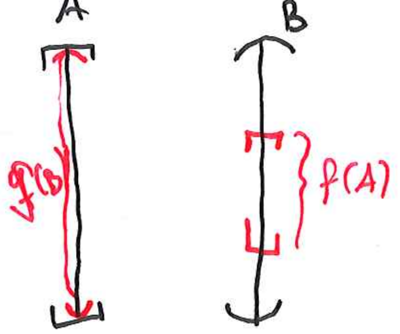
Inte alltid lätt att skapa en bijektion.

Exempel: Har $A=[-1,1]$ och $B=(-1,1)$ samma kardinalitet

Lösning: Vi börjar med att försöka förstå problemet

~~Skulle A~~ Kardinaliteten av A borde vara minst lika stor som B eftersom det finns en injektion $g: B \mapsto A$, säg $g(x)=x$.

Men också $f: A \mapsto B$, ~~t~~ t.ex. $f(x)=\frac{x}{2}$ vilken är injektiv. Så kardinaliteten borde vara lika.



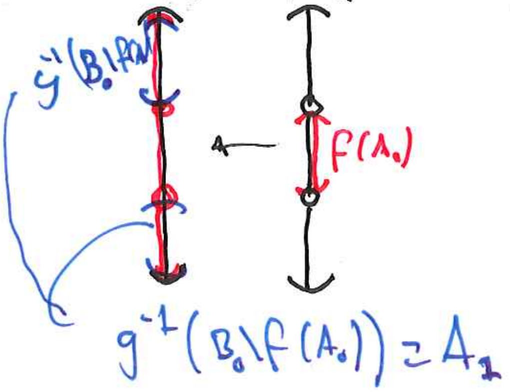
g är nästan en bijektion men punkterna -1 och 1 ligger inte i bildmängden av g så låt oss "ta hand om dessa"

Vi definierar h från $A\setminus g(B) =: A_0$

enl. $h: A_0 \mapsto f(A_0) = B_0$
$x \mapsto f(x)$

då är h en bijektion från A_0 till $f(A_0)$

Vad har vi kvar: $A\setminus g(B)=:A_0$: $B\setminus B_0$



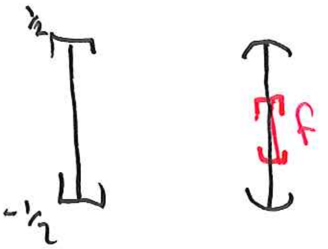
Definiera $h: g^{-1}(B_0\setminus f(A_0)) \mapsto B_0\setminus f(A_0)$
$x \mapsto g(x)$

Då är h definierad som en bijektion från $A_0 \cup A_1$

Vad har vi kvar?

$$A \setminus (A_0 \cup A_1) = \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

och $\quad B \setminus h(A_0 \cup A_1) = \left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$



Låt $A_2 = [A \setminus (A_0 \cup A_1)] \setminus g(B \setminus h(A_0 \cup A_1))$

$= \left\{-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\}$ och

utvidga $\quad h : A_2 \longmapsto f(A_2)$

$\qquad\qquad x \longmapsto f(x)$

e.t.c. då kommer vi att definiera

h på $\displaystyle\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j = [-1, 1] \setminus \{0\}$

Also $\quad h\left(\displaystyle\bigcup_{j\geq 0}^{\infty} A_j\right) = B \setminus \{0\}$

så vi kan utvidga h: så att $h(0) = 0$.

Då är h en ~~bijektion~~ bijektion från $[0,1] \longmapsto (0,1)$

I det här fallet så kan vi skriva ner h

explicit:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{j+1}} & \text{om } x = \frac{1}{2^j} \text{ för något } j \\ -\frac{1}{2^{j+1}} & \text{om } x = -\frac{1}{2^j} \text{ för något } j \\ x & \text{i annat fall.} \end{cases}$$

En av de svåra sakerna med föregående exempel är att vi inte riktigt använder att $A=[-1,1]$ och $B=(-1,1)$. På en strukturell, eller axiomatisk, nivå så kan man genomföra i princip samma argument för vilka mängder A & B och injektiva avbildningar som helst.

SATS (Schroeder-Bernstein): Låt A och B vara mängder och $f: A \to B$, $g: B \to A$ vara injektiva. Då finns det en bijektion från A till B.

Bevis: (Inte samma som boken):
Om $a_j \in A$ så kan vi skapa en kedja

$$a_j \xrightarrow{f} b_j \xrightarrow{g} a_{j+1} \longrightarrow b_{j+1} \longrightarrow \dots$$

Och om $a_j \in \mathrm{Range}(g)$ så kan vi fortsätta kedjan bakåt, eftersom g är injektiv så är även kedjan bakåt ~~är~~ unik,

$$\xrightarrow{g} a_{j-1} \xrightarrow{f} b_{j-1} \xrightarrow{g} a_j \xrightarrow{f} b_j \xrightarrow{g} a_{j+1} \xrightarrow{f} \dots$$

samma gäller för $b_j \in B$.

Eftersom kedjan är bestämd av ett element så ligger varje element $a \in A$, $b \in B$ i en unik kedja som sträcker sig oändligt till höger och antingen ändligt eller oändligt till vänster.

Vi vill definiera $h: A \to B$ så att h är en bijektion.

Vi definierar h enligt följande

$$h(a_k) = \begin{cases} b_k \quad (= f(a_k)) & \text{om kedjan som innehåller } a_k \text{ är oändlig till vänster} \\ & \text{eller om kedjan börjar med } a \in A \\ b_{k-1} \quad (g^{-1}(a_k)) & \text{om kedjan börjar med } b \in B. \end{cases}$$

1) Eftersom varje $a \in A$ ligger i en kedja ~~att~~ så är $h(a)$ definierad för alla $a \in A$.

2) $h(a)$ har en invers eftersom för varje b_k har vi två möjligheter

i) kedjan som innehåller b_k är oändlig eller börjar med ett $a \in A$ $\Rightarrow$ $h^{-1}(b_k) = a_k$

ii) $h^{-1}(b_k) = a_{k+1}$ annars.

■

Förra ~~t~~ timmen gjorde vi något ganska abstrakt och inte jättecentralt för analysen. Nu ska vi gå igenom ~~[illegible]~~ en av de mest centrala delarna av kursen – teori för kontinuerliga funktioner. Det är repetition från envarren, men i envarre var det A material. Nu är det något som ni måste kunna.

> **Sats** Om f är kontinuerlig på $[a,b] \subset \mathbb{R}$ så kommer f att vara begränsad:
> $\exists\, m, M \in \mathbb{R} \quad m \leq f(x) \leq M$.

Bevis: Låt

$$X = \{\cancel{x} \in [a,b]\, ;\ f(\cancel{y}) \text{ är begränsad för } a \leq y < x\}$$

då kommer

$X \neq \emptyset$ eftersom $a \in X$ $\quad (f(a) < \infty$ då $f(a) \in \mathbb{R})$

och $x \in X \Rightarrow x \leq b$ så X begränsad i $\mathbb{R}$.

Enl. l.u.b. egenskapen så existerar

$c = \text{l.u.b.}(X)$.

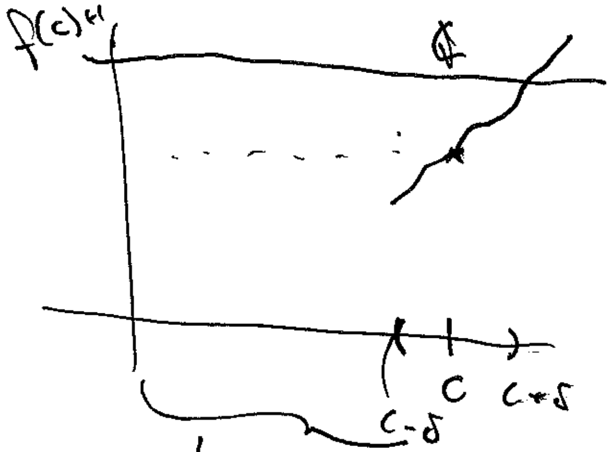
~~Om $c = b$ och då så är $f(x)$ begränsad på hela $X = [a,b]$. Så låt oss antaga att c~~

Vi hävdar att $c = b$. Om $c < b$ så kommer $\exists \delta_1 > 0$, eftersom f är kont, så att

$$|x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < 1 \Leftrightarrow f(c) - 1 < f(x) < f(c) + 1$$

så f är begränsad på $(\cancel{x} - \delta, \cancel{x} + \delta)$

Men det innebär att f är begränsad på hela $[a, c+\delta)$,



begränsad då f är begränsad ~~för alla~~ på $[a,d]$. för alla $d < c$.

Så $\not\exists$ $l.u.b(X) = b$. Men f är kont. på $[a,b]$

så $\exists \delta_1$ så att

$b-\delta_1 < x \leq b \quad \Rightarrow f(b)-1 < f(x) < f(b+1)$

så f är begränsad på $(b-\delta, b]$ och på $[a,d]$ för varje $d<b$. $\Rightarrow$ f begränsad. $\boxtimes$

<u>Sats</u>: Om f är kont. på $[a,b] \subset \mathbb{R}$ då existerar två $x_0, x_1 \in [a,b]$ så att $f(x_0) \le f(x) \le f(x_1)$

<u>Bevis</u>: (Bara för x_1, x_0 följer av att betrakta $-f$)

Låt $M = l.u.b(V_f)$ vilken är icketom och, från föregående sats, begränsad.

Definiera $X = \{x \in [a,b];\ l.u.b(V_x) < M \}$ ~~$l.u.b(V_x) < M$~~ ~~$f(y) < M,\ y \in [a,x]$~~

Om $f(a) = M$ så är vi klara med $x_1 = a$.

Om $f(a) < M$ så är $X \neq \emptyset$ och

$l.u.b(X) = c$ existerar.

Vi hävdar att $f(c) = M$

Om $f(c) < M$ låt $M - f(c) = \varepsilon > 0$, då existerar det ett $\delta_\varepsilon > 0$ så att

$$\left.\begin{array}{l} x \in [a,b] \\ |x - c| < \delta_\varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(c) + \varepsilon = M$$

så alla $x \in (c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \cap [a,b] \in X$

eftersom c var $l.u.b(X)$ så måste $c = b$

(inga $x > c$ kan ligga i $(c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon) \cap [a,b]$)

~~Detta implicerar att~~

~~Detta ger upphov till två fall~~ ~~1) $f(b) < M$ men då är~~

Men då är $l.u.b\, V_b = \text{lub } f < M$ motsägelse