Föreläsning 4
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

8 september, 2016

Introduktion

Förra gången:

- Rotort
- Nyquistkriteriet

Dagens program:

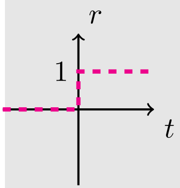
- Specifikationer
- Frekvenssvar
- Bodediagram

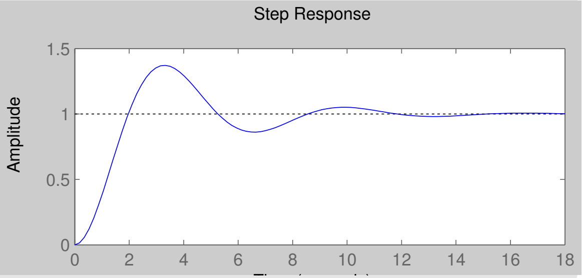
Objektiva prestandamått

1. Utsignalens förmåga att följa en given referenssignal (servo).

Example (Stegsvar)

Antag att ett steg ges i referenssignalen vid tiden $t = 0$. Härunder syns steget i referenssignalen samt svaret från ett system (som försöker följa steget):





Objektiva prestandamått

Man kan mäta detta med hjälp av bland annat

- *Stigtiden*, $T_r = t_2 - t_1$ där

$$\begin{cases} y(t_2) = & 0.9 \\ y(t_1) = & 0.1 \end{cases}$$

- *Insvängningstiden*, T_s som defineras av att

$$1 - p \leq y(t) \leq 1 + p \qquad \forall \;\; t \geq T_s$$

- *Överslängen*, $M = (y_{\mathsf{max}} - 1) \cdot 100\%$.

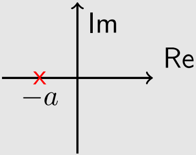
Objektiva prestandamått

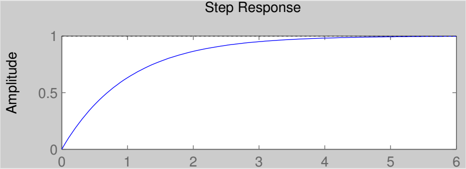
Example

Antag att

$$G_c(s) = \frac{a}{s+a}$$

Stegsvaret och polplaceringen syns i figurerna (för $a = 1$).





Dessa ger oss

$$\begin{cases} T_r & = \frac{2.2}{a} \\ T_s(5\%) & \approx \frac{3}{a} \\ M & = 0 \end{cases}$$

Objektiva prestandamått

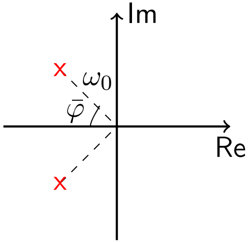
Skriver vi om ett systems överföringsfunktion på formen

$$G_c(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

kan vi definera den *relativa dämpningen*, ξ, som

$$\xi \equiv \cos\bar{\varphi}$$

där vinkeln $\bar{\varphi}$ är definerad i figuren (Fig 2.6 i boken) nedan



Objektiva prestandamått

Då ges de ovannämnda prestandamåtten av

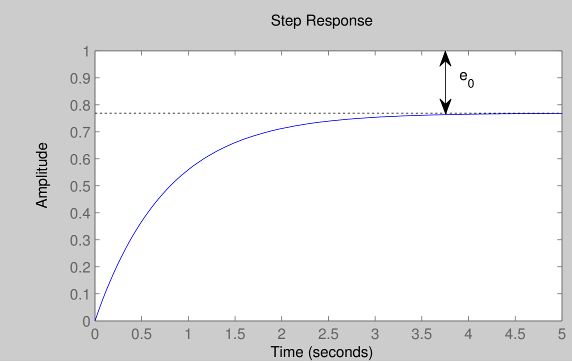
$$\begin{cases} T_r = \frac{\text{konstant}}{\omega_0} \\ T_s(5\%) \approx \frac{3}{\omega_0 \xi} \qquad\qquad \text{(för små } \xi\text{)} \\ M = e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \end{cases}$$

Se boken för härledningar.

Viktigt vid rotortsanalys/-design. $\Leftrightarrow$ *Dominerande poler.*

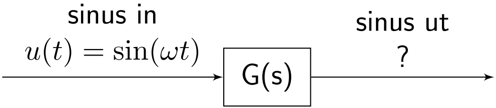
Objektiva prestandamått

2. Stationära fel



3. Andra mått som t.ex. störningsundertryckningar (regulatorproblemet).

Frekvenssvar



$$\Longrightarrow y(t) = \underbrace{|G(i\omega)|}_{\text{förstärkning}} \cdot \sin\left[\omega t + \underbrace{\arg G(i\omega)}_{\text{fasvridning}}\right] + \text{transient (stabil)}$$

Frekvenssvaret ges av $G(i\omega)$.

Bevis genom faltningsräknande.

Frekvenssvar

Example

Antag att $G(s) = s$ och att insignalen är $u(t) = \sin(\omega t)$.

$$\implies y(t) = \omega\cos(\omega t) = \omega \sin\left[\omega t + \frac{\pi}{2}\right]$$

Fasvrider: $+90^\circ$
Förstärker: Höga frekvenser mer än låga (med faktor ω)

Example

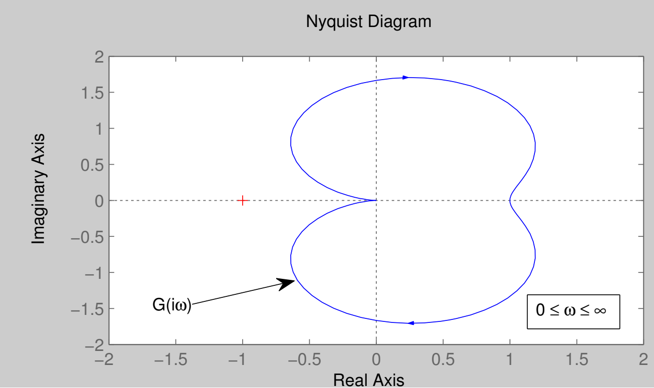
Antag att $G(s) = \frac{1}{s}$ och att insignalen är $u(t) = \sin(\omega t)$.

$$\implies y(t) = -\frac{1}{\omega}\cos(\omega t) + \text{konstant} = \frac{1}{\omega}\sin\left[\omega t - \frac{\pi}{2}\right] + \text{konstant}$$

Fasvrider: -90°
Förstärker: Låga frekvenser mer än höga (med faktor $\frac{1}{\omega}$)

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

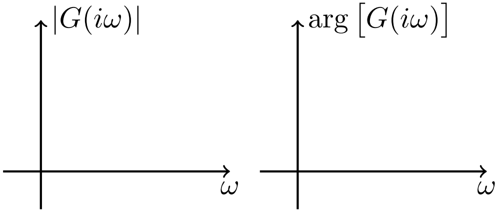
Nyquistdiagram:



Svårt att avläsa frekvens.

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

Bodediagram:



Två grafer med ω som variabel på den horisontella axeln och förstärkningen respektive fasvridningen på den vertikala.

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

Example

Antag att

$$G(s) = \frac{s+b}{s(s+a)} = \underbrace{\frac{b}{a}}_{K} \frac{1+\frac{s}{b}}{s(1+\frac{s}{a})}$$

då är frekvenssvaret givet av

$$G(i\omega) = \frac{K\left(1+\frac{i\omega}{b}\right)}{i\omega\left(1+\frac{i\omega}{a}\right)}$$

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

Example (fort.)

Amplitudkurva:

$$\log|G(i\omega)| = \log K + \log\sqrt{1+(\frac{\omega}{b})^2} - \log\omega - \log\sqrt{1+(\frac{\omega}{a})^2}$$

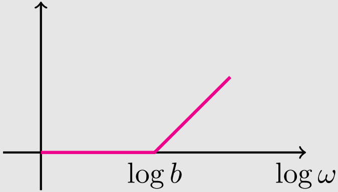
Approximation:

$$\log\sqrt{1+(\frac{\omega}{b})^2} = \frac{1}{2}\log\left[1+(\frac{\omega}{b})^2\right] \approx$$

$$\approx \begin{cases} 0, & \omega < b, \quad \omega \text{ liten} \\ \log\omega - \log b, & \omega \geq b, \quad \omega \text{ stor} \end{cases}$$

Rita $G(i\omega)$ som funktion av ω

Example (fort.)



Lutningen ökar med $+1 \approx 20$ dB/dekad.

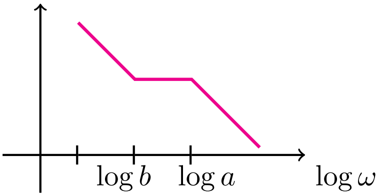
Maximalt fel vid $\omega = b \Rightarrow \frac{1}{2}\log 2 = 0.15 = 3$ dB.

Approximativt Bodediagram

Vi hittar *brytpunkter* vid frekvenserna

$$\begin{aligned} \omega = b \quad & \text{som ger lutning } +1 \\ \omega = a \quad & \text{som ger lutning } -1 \end{aligned}$$

Om ω liten är lutningen (antal integratorer) -1.



Approximativt Bodediagram

I praktiken ritas Bodediagram med hjälp av dator.

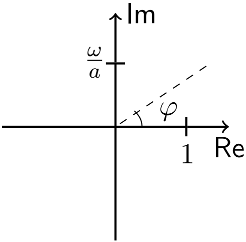
På övningarna är det enklast att beräkna exakta värden vid brytpunkterna och sen några till och interpolera.

Faskurva

Man brukar också rita en faskurva i Bodediagram.

$$\arg\left[G(i\omega)\right] = \arg\left[\frac{1+\frac{i\omega}{b}}{i\omega\left(1+\frac{i\omega}{a}\right)}\right] =$$

$$= \arg\left[1+\frac{i\omega}{b}\right] - \arg[i\omega] - \arg\left[1+\frac{i\omega}{a}\right]$$



$$\varphi = \arctan\left[\frac{\omega}{a}\right]$$

Faskurva

$$\Rightarrow \arg\left[G(i\omega)\right] = \arctan\left(\frac{\omega}{b}\right) - 90^\circ - \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

I praktiken ritas även faskurvan med hjälp av en dator.
På övningarna: se amplitudkurva.

OBS: För komplexa tal:

$$\log(G(i\omega) = \log|G(i\omega| + i\arg\left[G(i\omega)\right]$$

Arctan

Kom ihåg att:

- $\arctan(0) = 0^\circ$
- $\arctan(1) = 45^\circ$
- $\arctan(\infty) = 90^\circ$

Minnesregel:
Argumentet är k-värdet för en linje med lutning $\arctan k$.

Komplexa poler

$$G(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

Vi kallar ξ för den *relativa dämpningen* och den antar värden i intervallet $0 < \xi < 1$.

Det finns många formler i boken.

Komplexa poler

Lutning:

$$\begin{cases} \omega \text{ liten} & 0 \\ \omega \text{ stor} & -2 \\ \omega = \omega_0 & \Rightarrow \log |G(i\omega_0)| = \log \frac{1}{2\xi} \end{cases}$$

Liten dämpning $\Rightarrow$ Stor förstärkning av frekvenser nära ω_0!

Rita noggrant!

Icke-minimumfastsystem

Jämför

$$\begin{aligned} G_1(s) &= \tfrac{1+s/b}{1+s/a} \\ G_2(s) &= \tfrac{1-s/b}{1+s/a} \end{aligned}$$

De har samma amplitudkurva:

$$|G_1(i\omega)| = |G_2(i\omega)|$$

Faskurvorna skiljer sig dock:

$$\arg\left[G_1(i\omega)\right] = \arctan\frac{\omega}{b} - \arctan\frac{\omega}{a}$$

$$\arg\left[G_2(i\omega)\right] = -\arctan\frac{\omega}{b} - \arctan\frac{\omega}{a}$$

dvs.

$$\arg\left[G_2(i\omega)\right] < \arg\left[G_1(i\omega)\right]$$

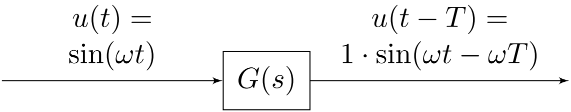
Icke-minimumfastsystem

$$\arg\left[G_2(i\omega)\right] < \arg\left[G_1(i\omega)\right]$$

$\Rightarrow G_2$ fasvrider mer (negativt) än G_1!

Minimumfas = nollställen och poler i V.H.P.

Tidsfördröjning



$$\Longrightarrow G(i\omega) = 1 \cdot e^{-i\omega T}$$

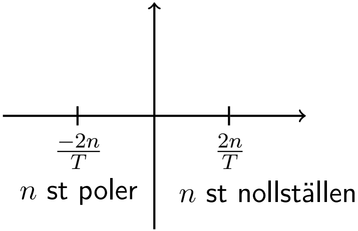
$$\Longrightarrow G(s) = e^{-sT}$$

Vi ser att $|G(i\omega)| = 1$ och att $\arg\left[G(i\omega)\right] = -\omega T$.

Icke-minimumfas, jämför $G_1 = 1$.

Poler och nollställen

$$e^{-sT} = \left[\frac{e^{-\frac{sT}{2n}}}{e^{+\frac{sT}{2n}}}\right]^n \approx \frac{\left[1 - \frac{sT}{2n}\right]^n}{\left[1 + \frac{sT}{2n}\right]^n}$$



Bodes relation

Bodes relation ger en koppling mellan förstärkning och fas.

Theorem (Bodes relation)

Låt $G(s)$ vara minimumfas och $G(0) > 0$.

Om $|G(i\omega)|$ i ett visst frekvensområde avtar med

$$\begin{aligned} 20dB/\mathit{dekad} &\Rightarrow \arg\left[G(i\omega)\right] \approx -90^\circ \\ 40dB/\mathit{dekad} &\Rightarrow \arg\left[G(i\omega)\right] \approx -180^\circ \end{aligned}$$

osv.

För komplexa tal:

$$\log(G(i\omega) = \log|G(i\omega| + i \arg\left[G(i\omega)\right]$$