

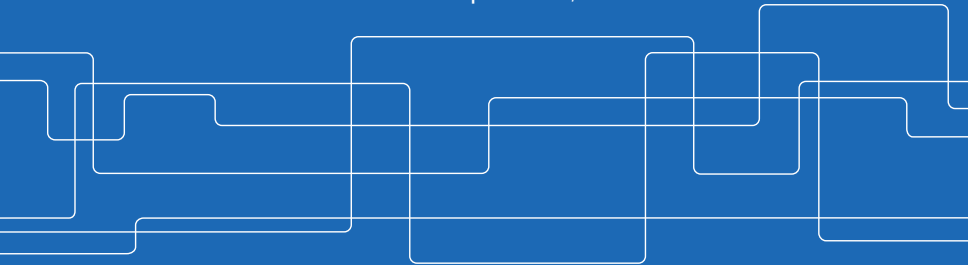


Föreläsning 3

Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

5 september, 2016





Introduktion

Förra gången:

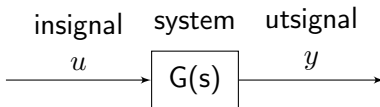
- PID-reglering

Dagens program:

- Stabilitet
 - ▶ Rotort
 - ▶ Nyquist

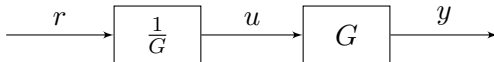


Vad är regler teknik?



Målet är att $y = r$ (referenssignal), trots störningar och begränsningar.

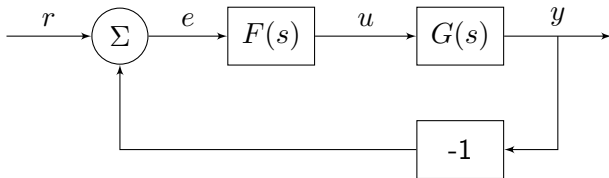
Idé: *Öppen styrning*, invertering



Problem:

- Tar ej hänsyn till störningar och modellfel
- Stor insignal $U(s) = \frac{1}{G(s)}R(s)$
- Stabilt?

Återkoppling från reglerfelet $e = r - y$.



- $r \mapsto y$: $G_c = \frac{FG}{1+FG}$
- $r \mapsto u$: $G_{ru} = \frac{F}{1+FG}$



PID-reglering

P-reglering: $F = K$ (dvs. $u = Ke$)

- $G_c = \frac{KG}{1+KG} \approx 1$ om K stor
- $G_{ru} = \frac{K}{1+KG} \approx \frac{1}{G}$ om K stor

"Invertering mha återkoppling!"

Problem med stabilitet! (LAB 1)



PI-reglering:

$$F(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_I} \frac{1}{s} \right), \quad F(0) = \infty$$

$$\implies G_c(0) = 1$$

dvs. inget stationärt fel, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$. (Jmf slutvärdesteoremet)

Problem:

- Problem med stabilitet
- Problem om styrsignalen, u , mättar (integratoruppvridding)



PID-reglering

PD-reglering:

$$F(s) = K(1 + T_D s)$$

Example (Inverterad pendel)

Överföringsfunktionen ges av

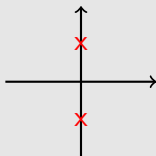
$$G(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

$$\Rightarrow G_c = \frac{FG}{1 + FG} = \frac{K[1 + T_D s]}{s^2 + KT_D s + K - g/l}$$

Example (Inverterad pendel, fort.)

Poler:

Med $T_D = 0$ fås



vilket ej fungerar (det återkopplade systemet oscillerar).

Väljer vi istället $T_D = 2/K$ och $K = 1 + g/l$ ges polerna av ekvationen $(s + 1)^2 = 0$, dvs. dom hamnar i -1 och -1 (dubbelpol).

D -termen ger stabilitet (dämpar svängningarna)!



Stabilitet

Hur avgör man stabilitet?

Asymptotiskt stabilt = Poler strikt i V.H.P. \Rightarrow
Insignal-utsignalstabilt

1. Räkna ut slutna systemets poler

Example (2:a gradspolynom)

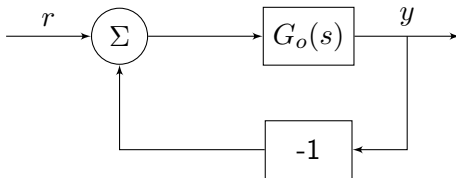
$$(s - a)(s - b) = s^2 + (-a - b)s + ab,$$

Stabila poler $\Leftrightarrow a$ och b i V.H.P. $\Leftrightarrow -a - b > 0$ och $ab > 0$, dvs polynomet har positiva koefficienter

2.
 - ▶ Rouths algorithm (övning)
 - ▶ Rotort
 - ▶ Nyquistkriteriet



Rotort



$G_o(s)$ är det öppna systemet.

$$Y(s) = \underbrace{\frac{G_o(s)}{1 + G_o(s)}}_{G_c(s)} R(s)$$

$G_c(s)$ är det slutna systemet.



Rotort

Antag att

$$G_o(s) = K \frac{Q(s)}{P(s)}$$

så att

$$G_c(s) = \frac{KQ(s)}{P(s) + KQ(s)}$$

Polerna till det återkopplade systemet ges då av

$$P(s) + KQ(s) = 0 \quad (*)$$

Rotort:

Plotta polerna, dvs. rötterna till (*), som funktion av K [$0 < K < \infty$].



Example (Rotort)

Antag

$$G_o(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)}$$

Detta ger en ekvation (*) på formen

$$\underbrace{s(s+1)(s+2)}_{P(s)} + K \underbrace{(s+4)}_{Q(s)} = 0$$

som vi skriver om som

$$\frac{s(s+1)(s+2)}{(s+4)} = -K$$

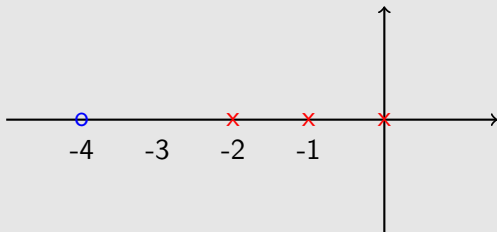
Example (Rotort, fort.)

I. Startpunkter, $K = 0$

Vi markerar dessa med kryss i grafen. I vårt fall ges de av $s = 0, -1, -2$.

II. Ändpunkter, $K = \infty$

Vi markerar dessa med ringar i grafen. Vi har tre stycken, $s = -4, \infty, \infty$.





Example (Rotort, fort.)

III. Var ligger ∞ ?

Studera

$$\arg \left[\frac{s(s+1)(s+2)}{(s+4)} \right] = \arg[-K] = \pi + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, ..$$

$$\implies \arg s + \arg(s+1) + \arg(s+2) - \arg(s+4) = \pi + 2\pi n$$

Om s är stor kommer alla vinklar (argument) vara approximativt lika stora.

$$\implies 3\varphi - \varphi = \pi + 2\pi n$$

$$\implies \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

Example (Rotort, fort.)

Mer detaljerad analys

$$\begin{aligned}\frac{s(s+1)(s+2)}{(s+4)} &= s^2 + (1+2-4)s + \frac{6s}{s+4} \\ &= \left(s + \frac{(1+2-4)}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{6s}{(s+4)} \\ &= \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \frac{6s}{(s+4)}\end{aligned}$$

För stora s dominerar första termen, vilket för stora K ger ekvationen

$$\left(s - \frac{1}{2}\right)^2 = -K$$

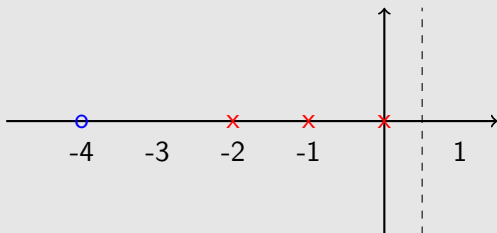
Beskriver asymptoterna i mer detalj!

Example (Rotort, fort.)

Asymptoter är strålar som startar i *skärningspunkten*:

$$\frac{1}{2}[0 - 1 - 2 - (-4)] = \frac{1}{2}$$

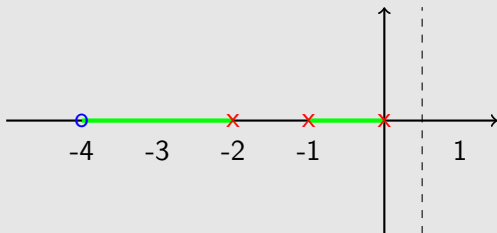
och har riktningar $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.



Example (Rotort, fort.)

IV. Var på Re-axeln kan det finnas rötter?

Punkter där *summan* av *antalet* start- och ändpunkter till *höger* är *udda* tillhör rotorten. (Se boken)





Example (Rotort, fort.)

V. Var på Im-axeln kan det finnas rötter?

Ansätt att $s = i\omega$ i (*) och lös med avseende på ω och K .

$$\begin{aligned}s^3 + 3s^2 + 2s + Ks + 4K &= 0 \\ \Rightarrow -i\omega^3 - 3\omega^2 + 2i\omega + Ki\omega + 4K &= 0\end{aligned}$$

Realdelen:

$$-3\omega^2 + 4K = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{4}{3}K$$

Imaginärdelen:

$$\begin{aligned}-\omega^3 + 2\omega + K\omega &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} \omega &= 0 \\ \omega^2 &= 2 + K \end{cases}\end{aligned}$$

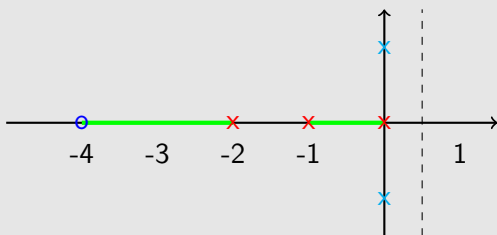
Example (Rotort, fort.)

Den ena lösningen, $\omega = 0$, ger att $K = 0$.

Den andra, $\omega^2 = 2 + K$, ger $2 + K = \frac{4}{3}K$ dvs.

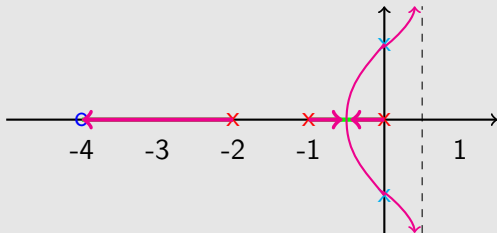
$$\Rightarrow \begin{cases} K = 6 \\ \omega = \pm\sqrt{8} \approx \pm 2.8 \end{cases}$$

Vi markerar dessa punkter i grafen:



Example (Rotort, fort.)

VI. Slutsats



Stabilt för $K < 6$. Oscillativt när K närmar sig 6. För stora K ges polerna av öppna systemets nollställen och relativa gradtal (nollställen i oändligheten).



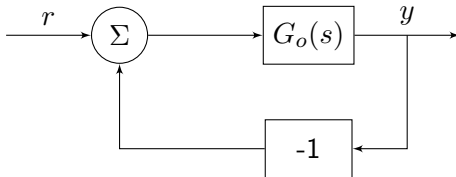
Example (Rotort, fort.)

Observationer:

- Rotorten är symmetrisk med avseende på Re-axeln ($x \pm iy$)
- En punkt ingår bara för ett visst K -värde ($s \mapsto K$)
- K är ofta förstärkningen i en P-regulator. Metoden är dock mer generell.

Viktigt verktyg för att få en *uppfattning* om vad som händer när man ändrar på en parameter.

Nyquistkriteriet



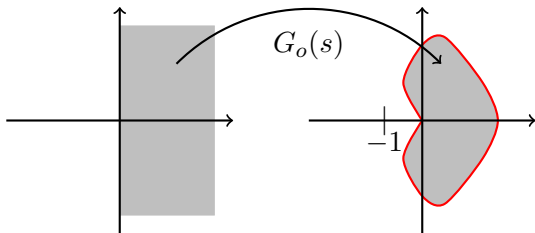
$$\Rightarrow G_c = \frac{G_o}{1 + G_o}$$

Polerna till $G_c(s)$ ges av nollställen till $1 + G_o(s)$!

Nyquistkriteriet

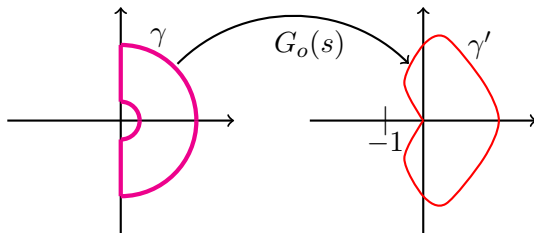
Finns det något $s \in \text{H.H.P.}$ så att $G_o(s) = -1$? (\Rightarrow Instabilt)

Idé: Pröva alla $s \in \text{H.H.P.}$



Nyquistkriteriet

Ett smartare sätt är att bara kolla randen om $G_o(s) \neq \infty$,
 $s \in \text{H.H.P.}$, dvs. om öppna systemet är stabilt.





Förenklade Nyquistkriteriet

Theorem (Förenklade Nyquistkriteriet)

Antag $G_o(s)$ är stabil (poler i $s = 0$ är OK).

Då är $G_c(s)$ asymptotiskt stabil om γ' ej omsluter -1 .

Nyquistkriteriet = Argumentvariationsprincipen (Konvex Analys)

Viktigaste delen av kurvan är $G_o(s)$, $s = i\omega$, $r < \omega < R$.

Observera $G_o(\infty) = 0$ och $G_o(0) \approx K/s^p$ där p är antal poler i origo.