September 6, 2016. Föreläsning 3.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Linjer, plan, punkter och vektorer;
- ortogonal projektion;
- avståndet mellan punkter och linjer;
- vektor produkt;
- area av en triangel i planet och rummet.

1. **Linjer, plan, punkter och vektorer.**
   - En vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ som är inte $\vec{0}$ är **parallel** till en linje L om v är parallel till en linjens riktningsvektor.
   - En vektor $\vec{v}$ i $\mathbb{R}^n$ som är inte $\vec{0}$ är **ortogonal** eller **normal** till en linje L om $\vec{v}$ är ortogonal till en linjens riktningsvektor, dvs. om $\vec{v}$ är ortogonal till $\vec{PQ}$ for alla punkter P och Q som ligger på linjen.
   - Två linjer är parallella (ortogonala) om deras riktningsvektorer är parallella (ortogonala).
   - En vektor v i $\mathbb{R}^n$ som är inte $\vec{0}$ är **parallel** till ett plan P om v är parallel till en vektor som kan srivas som $\vec{PQ}$, där P och Q är punkter i planet.
   - En vektor v i $\mathbb{R}^n$ som är inte $\vec{0}$ är **ortogonal** till ett plan P om v är orogonal till $\vec{PQ}$ for alla punkter P och Q i planet.

2. Vi kan beräkna avståndet mellan punkter linjer och plan i $\mathbb{R}^n$.
   - Avståndet mellan en punkt P och en linje L ges av det minsta avståndet mellan P och punkterna som ligger på L.
   - Avståndet mellan två linjer (plan) L_1 och L_2 ges av det minsta avståndet mellan punkterna som ligger på L_1 och L_2.

3. **Uppgift.** Låt V och W var två plan in $\mathbf{R}^3$. Bevisa att det finns två möjligheter: de skär varandra eller de är parallella.

4. **Proposition.** Låt L vara en linje och $\vec{v}$ en vektor i $\mathbb{R}^n$.
   (1) $\vec{v}$ kan skrivas på ett unik sätt som en summa av två vektorer $\vec{v} = \vec{v_L} + \vec{w}$ så att $\vec{v_L}$ är parallell till L och $\vec{w}$ är ortogonal till L. Vektor $\vec{v_L}$ kallas för **ortogonal projektion** av $\vec{v}$ på linjen L och betecknas med $\vec{v_L} = \text{proj}_L(\vec{v})$.
   (2) Låt $\vec{u}$ vara en riktning vektor till L. Då:
   $$\text{proj}_L(\vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||^2}\vec{u}$$
   (3) Låt Q vara en punkt som ligger på linjen L. Avståndet mellan P och L ges av längden av:
   $$\vec{QP} - \text{proj}_L(\vec{QP})$$

5. **Uppgift.** Låt L vara en linje i planet som passerar genom punkterna $(1, 2)$ och $(-1, 4)$. Bestäm projektionen av $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$ på linjen. Beräkna avståndet mellan linjen och punkten $(2, 2)$.

6. **Uppgift.** Skriv en matlab kod som har:

input: two punkter och en vektor i $\mathbf{R}^n$
output: ortogonal projektion av vektorn på linjen som innehåller punkterna.

7. **Uppgift.** Skriv en matlab kod som har:

input: tre punkter i $\mathbf{R}^n$
output: avståndet melen tredje punkten och linjen som innehåller första två punkter.

8**. Proposition.** Avståndet mellan punkten $P = (p, q)$ och linjen L som ges av $aX + bY + c = 0$ kan beräknas med:

$$\text{avståndet mellan } P \text{ och } L = \frac{|ap + bq + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

9. **Uppgift.** Låt $P = (1, -1)$ vara en punkt och L vara linjen som passerar genom $(0, 1)$ och $(2, 3)$. Beräkna avståndet mellan punkten P och linjen L.

10. **Uppgift.** Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vara vektorer i planet. Beräkna arean av parallellogramet med $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som sidor.

Lösning. Låt L vara linjen som passerar genom origo och har $\vec{v}$ som normal vektor. Det betyder att $\vec{w} = \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$ är riktnings vektor till L. Märka att $||\vec{w}|| = ||\vec{v}||$. Betrakta projektionen av $\vec{u}$ på L. Den ges av $\text{proj}_L(\vec{u}) = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{||\vec{w}||^2} \vec{w}$. Höjden av parallellogramet ges av längden av den projektion $||\frac{\vec{w} \cdot \vec{u}}{||\vec{w}||^2} \vec{w}|| = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{u}|\, ||\vec{w}||}{||\vec{w}||^2} = \frac{|\vec{w} \cdot \vec{u}|}{||\vec{w}||}$. Vi kan konstatera att area av parallellogramet är lika med:

$$||\vec{v}|| \frac{|\vec{w} \cdot \vec{u}|}{||\vec{w}||} = |\vec{w} \cdot \vec{u}| = |v_1 u_2 - v_2 u_1|$$

11**. Proposition.** Arean av parallellogramet i planet med vektorerna $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ som sidor är lika med $|u_1 v_2 - u_2 v_1|$.

12. **Uppgift.** Beräkna arean av triangel i planet som har horn i punkterna $(1, 2)$, $(-1, 2)$ och $(-1, -1)$ (man kan göra detta i allmänhet för godtyckliga punkter i planet).

13. **Vektor produkt i rummet.** Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vara vektorer i rummet. Deras vektor produkt är en vektor som har följande koordinater:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2v_3 - v_2u_3 \\ -u_1v_3 + v_1u_3 \\ u_1v_2 - v_1u_2 \end{bmatrix}$$

14. **Proposition.** Vektor produkt har följande egenskaper:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{u}$ och $\vec{v}$ är ortogonala till $\vec{u} \times \vec{v}$.
- Längden $||\vec{u} \times \vec{v}||$ är lika med area av parallellogramet som har $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som sidor.

15. **Uppgift.** Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm vektor produkt $\vec{u} \times \vec{v}$. Beräkna area av parallellogramet som har $\vec{u}$ och $\vec{v}$ som sidor.

16. **Uppgift.** Beräkna area av triangel i rummet som har horn i punkter $P = (-1, 2, -1)$, $Q = (-2, 3, 0)$, och $R = (2, 1, 4)$. Man kan göra detta i allmänhet för godtyckliga punkter i rummet.

17. **Uppgift.** Bestäm en ekvation av ett plan i rummet som innehåller punkterna $(1, 2, 3)$, $(-1, 0, 3)$, och $(-1, -1, -1)$.

18. **Uppgift.** Beräkna avståndet mellan plan i $\mathbf{R}^3$ som ges av $2x - 4y - 2z = 6$ och $-x + 2y + z = 5$.