September 1, 2016. Föreläsning 2.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- Skalär produkt.
- Linjer.
- Plan.

1. **Operationer med vektorer III.**

- **Skalär produkt.** $\boxed{\text{Vi kan multiplicera två vektorer och få ett reell tal.}}$

– i $\mathbb{R}^2$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2$.

– i $\mathbb{R}^3$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$.

– i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n$.

Observera att längden av $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^n$ kan beräknas som kvadratroten av skalär produkt:

$$||\vec{v}|| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

2. **Proposition.** Skalär produkten har följande egenskaper:

- $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
- $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- $(\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\lambda \vec{w})$.

3. **Operationer med vektorer IV.**

- $\boxed{\text{Vi kan beräkna vinkel mellan två vektorerna i } \mathbb{R}^2 \text{ eller } \mathbb{R}^3 \text{ som är inte } \vec{0}.}$

Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$. Antar att $v \neq 0$ och $w \neq 0$. Vinkeln mellan v och w är den minsta vinkel mellan strecken som ges av v och w. Vinkeln α mellan två vektorer uppfyller $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Följande är ekvivalenta om två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$:

– v och w är parallella (det finns en skalär λ så att$\lambda v = w$.

– v och w bildar vinkeln 0 eller π.

Hur kan vi definiera vinkeln mellan två vektorer i $\mathbb{R}^n$ för $n > 3$? I planet eller rummet användade vi geometri. Vi kan inte göra detta i $\mathbb{R}^n$ för $n > 3$. Istället kommer vi att tillämpa följande:

4. **Proposition.** Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ som är inte $\vec{0}$. Då:

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = ||\vec{v}||\,||\vec{w}||\cos(\alpha) \qquad \text{eller} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||}$$

där α är vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$.

Till exampel, låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^2$ och α vara vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$. Då $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||}\frac{3-10}{\sqrt{1+4}\sqrt{9+15}} = \frac{-7}{\sqrt{120}}$.

5. **Proposition.** Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara vektorer i $\mathbf{R}^n$ som är inte $\vec{0}$. Då: $|\vec{v}\cdot\vec{w}| \leq ||\vec{v}||\,||\vec{w}||$.

Till exampel:

$$\left|\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}\right| = |3+2+12| = 17$$

$$\left|\left|\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}\right|\right| \left|\left|\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{1+4+9}\sqrt{9+1+16} = \sqrt{14\cdot 26} = \sqrt{364}$$

6. **Definition.** Låt $\vec{v}$ och $\vec{w}$ vara vektorer i $\mathbb{R}^n$ som är inte $\vec{0}$. Vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{w}$ definieras som α så att $0 \leq \alpha \leq \pi$ och:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{||\vec{v}||\,||\vec{w}||}$$

7. **Ortogonala vektorer.** Två vektorer kallas för **ortogonala** om en av dem är $\vec{0}$ eller om de är inte $\vec{0}$ då bildar de vinkeln $\pi/2$ (vi också skriver att en vektor är vinkelrät mot en annan vektor).

Hur kan vi verifiera att två vektorer är ortogonala? Kom ihåg att för $0 \leq \alpha \leq \pi$, $\alpha = \pi/2$ om och endast of $\cos(\alpha) = 0$. Altså:

8. **Proposition.** $\vec{v}$ och $\vec{w}$ i $\mathbb{R}^n$ är ortogonala om och endast om $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.

Till exampel vektorerna $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ är ortogonala.

9. **Uppgift.** Bestäm en vektor i $\mathbb{R}^2$ som är inte $\vec{0}$ och är ortogonal till $\vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. Bestäm alla vektorer som är ortogonala till $\vec{v}$.

10. **Uppgift.** Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ vara en vektor i rummet. Beskriv alla vektorer i rummet som är: (a) ortogonala till $\vec{v}$; (b) som parallella till $\vec{v}$.

11. **Linje.** Hur kan en rätt linje i $\mathbb{R}^n$ beskrivas?

- Det finns bara en linje som innehåler en punkt P och är parallell till en vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$. Linjen består av alla punkter vars kordinater kan skrivas som en summa:

$$P + t\vec{v}$$

där t är ett godtyckligt reell tal. Vektorn $\vec{v}$ kallas för en **riktningsvektor** till linjen. En riktning vektor kan inte vara $\vec{0}$.

Om $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är riktningsvektorer till samma linjen, då $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är parallella. Den metoden att beskriva en linje kallas för **parameter form**.

Till exempel en linje i planet som passerar genom en punkt $P = (a, b)$ och är parallell till vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \neq 0$ består av alla punkter som kan skrivas som en summa $P + t\,\vec{v} = (a + tv_1, b + tv_2)$, där t är ett godtyckligt reell tal.

En linje i rummet som passerar genom punkt $P = (a, b, c)$ och är parallell till vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \neq \vec{0}$ består av alla punkter som kan skrivas som en summa $P + t\,\vec{v} = (a + tv_1, b + tv_2, c + tv_3)$, där t är ett godtyckligt reell tal.

- Det finns bara en linje som passar genom två olika punkter i $\mathbf{R}^n$. Altså för att beskriva en linje vi kan bara ge två olika punkter som ligger på linjen.

Linjen som passar genom två olika punkter P och Q i $\mathbf{R}^n$ består av alla punkter som kan skrivas som en summa:
  - $P + t\vec{PQ}$, där t är ett godtyckligt reell tal, eller
  - $P + t\vec{QP}$, där t är ett godtyckligt reell tal, eller
  - $Q + t\vec{QP}$, där t är ett godtyckligt reell tal, eller
  - $Q + t\vec{QP}$, där t är ett godtyckligt reell tal.

12. **Uppgift.** Beskriva en linje i $\mathbb{R}^3$ som passerar genom $(2, -1, 4)$ och har riktnig vektor $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

13. **Uppgift.** Beskriva en linje i $\mathbb{R}^2$ som passerar genom punkterna $(2, 4)$ och $(5, -1)$.

14. **Uppgift.** Låt $P = (1, 2, 3)$, $Q = (-1, 0, 3)$, $A = (0, 3, -1)$, och $B = (-1, 4, a)$ vara punkter i rummet. Låt L_1 vara linjen som passerar genom P och Q och L_2 vara en linje som passerar genom A och B.

(1) Hitta värde av a så att linjer L_1 och L_2 är parallella.
(2) Hitta värde av a så att linjer L_1 och L_2 korsar varandra.

15. **Linje i planet, ekvation.** En linje i planet kan också beskrivas genom att ge en punkt som ligger på linjen och en vektor som är ortogonal till linjen. En vektor som är inte noll och är ortogonal till linjen L kallas för en **normal** vektor till L.

16. **Uppgift.** Bestäm linjen som innehåller $P = (-1, 2)$ och är ortogonal till $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

17. **Proposition.**

(1) Låt a, b, c vara reella tal. Mängd av alla vektoer $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ som uppfyller ekvation $ax + by = c$ beskriver en linje.
(2) För varje c' och c, linjen beskrev genom $ax + by = c'$ är parallell till $ax + by = c$.
(3) Vektor $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ är ortogonal till linjen $ax + by = c$.
(4) Vektor $\begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix}$ är parallell till linjen $ax + by = c$.

18. **Proposition.** Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ vara en vektor i planet. Antar att $v \neq 0$. Linjen som passerar genom punkten (p, q) och har $\vec{v}$ som normal vektor ges av ekvationen $ax + by + c = 0$, där $c = -ap - bq$.

19. **Uppgift.** Beskriva linjen in planet som innehåller punkter $(1, -2)$ och $(3, 18)$. Bestäm alla riktning vektorer till linjen. Beskriv linjen med ekvation $ax + by + c = 0$.

20. **Uppgift.** Betrakta linjen som ges av $2x - 3y + 1 = 0$. Bestäm alla punkter som ligger på linjen.

21. **Uppgift.** Låt L vara en linje i planet som passerar genom punkter $(1, 2)$ och $(-1, 4)$.

a. Bestäm alla normala vektorer till linjen L.
b. Bestäm alla riktning vektorer till L.

22. **Uppgift.** Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ vara en vektor.

a. Bestäm linjen som innehåller punkten $P = (0, 2)$ och har $\vec{v}$ som normal vektor.
b. Bestäm en ekvation som beskriver den linje.

23. **Linje i rummet.** En linje i rummet $\mathbf{R}^3$ kan också beskrivas genom att ge en punkt som ligger på linjen och två inte parallella vektorer som är ortogonala till linjen. En punkt (x, y, z) på en linje som är ortogonal till vektorer $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} e \\ f \\ h \end{bmatrix}$ uppfyller följande två ekvationer:

$$ax + by + cz = d \qquad ex + fy + hz = k$$

24. **Uppgift.** Beskriv linjen i $\mathbf{R}^3$ som innehåller punkterna $(-1, 0, 2)$ och $(2, 1, 1)$ med ekvationer.

25. **Tre punkter.** Låt P, Q, och R vara tre olika punkter i $\mathbf{R}^n$. Det finns två möjligheter:

- Punkterna ligger på en linje. Det händer om och endast om vektorerna $\vec{PQ}$ och $\vec{PR}$ är parallella. Till exempel:
  - avgör om punkterna $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, och $(0, -1, 0)$ ligger på samma linje i rummet.
- Punkterna ligger inte på en linje. Det händer om och endast om vektorerna $\vec{PQ}$ och $\vec{PR}$ är inte parallella. Till exempel:
  - Avgör om punkterna $(1, 1, 2)$, $(2, 3, 4)$, och $(1, -1, 0)$ ligger på samma linje i rummet.

26. **Uppgift.** Skriv matlab kod som har tre punkter i $\mathbf{R}^n$ för input och och som bestämmer om punkterna ligger på samma linje för output.

27. **Plan.** Hur kan ett plan i $\mathbb{R}^n$ beskrtivas?

- Antar att punkterna P, Q, och R ligger inte på samma linje. Då finns det bara ett plan i $\mathbf{R}^n$ som innehåller P, Q, och R.
- Antar att punkter P ligger inte på linjen L. Då finns det bara ett plan i $\mathbf{R}^n$ som innehåller P och L.
- Det finns bara ett plan som innehåller en punkt $P = (p_1, \ldots, p_n)$ och är parallell till två icke parallella vektorer $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Planet som passerar genom P och är parallell till $\vec{v}$ och $\vec{w}$ består av alla vektorer som kan skrivas som $\vec{P} + t\vec{v} + s\vec{w}$ där t och s är godtyckliga reella tal. Planet består av alla punkter med koordinaterna:
$$(p_1 + tv_1 + sw_1, p_2 + tv_2 + sw_2, \ldots, p_n + tv_n + sw_n)$$
där t och s är godtyckliga reella tal. Den presentation av planet heter **parameter framställning** av planet.

28. **Plan i rummet.** Ett plan i rummet kan beskrivas med 2 ytterligare metoder:

- Låt a, b, c vara reella tal. Antar att en av dem är inte 0. Lösningar till $aX + bY + cZ + d = 0$ beskriver ett plan i rummet.
- Det finns bara ett plan i rummet som innehåller en punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ och är ortogonal (vinkelrätt) till en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ som är inte $\vec{0}$. Planet som innehåller P och är ortogonal till $\vec{v}$ ges av $aX + bY + cZ + d = 0$, där $d = -(ap_1 + bp_2 + cp_3)$. Vektor som är ortogonal till planet och är inte 0 kallas för en **normal** vektor.

29. **Uppgift.** Låt H vara ett plan som ges på parameterform som:
$$(2t - 1, 2t + s - 1, t - 2s + 3)$$
där s och t är reella tal.

- Bestäm om punkten $(3, 2, 7)$ ligger på planet. I så fall hitta motsvarande värden på s och t.
- Samma fråga om $(1, 2, -1)$?
- Beskriv planet med en ekvation.

30. **Uppgift.** Låt $P = (2, -1, 3)$ och $Q = (0, 1, 1)$ vara punkter i rummet. Ge en ekvation av planet som innehåller punkt $(1, 1, 1)$ och är ortogonal till linjen som passerar genom P och Q.

31. **Uppgift.** Bestäm ekvation av planet i $\mathbb{R}^3$ som innehåler punkterna $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(0, 1, 2)$. Bestäm skärningen av planet med linjen som går genom punkterna $(0, 1, 1)$, $(-1, -1, -1)$.

32. **Uppgift.** Bestäm ekvationer av alla plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåler punkterna $(1, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, -1, 2)$.

33. **Uppgift.** Bestäm skärningen av planen som ges i uppgifter 31 och 32.