Augusti 29, 2016. Föreläsning 1.

Tillämpad linjär algebra

Innehållet:

- linjen $\mathbb{R}$, planet $\mathbb{R}^2$, rummet $\mathbb{R}^3$, och vektor rummet $\mathbb{R}^n$.
- Matriser.
- punkter och vektorer i planet, rummet, och $\mathbb{R}^n$.

1. **Linjen, planet, rummet, och vektor rummet $\mathbb{R}^n$.**

• Ett reell tal kallas också för en skalär. Mängden av alla reella tal betecknas med $\mathbb{R}$ och kallas för linjen.

• Ett par av reella tal betecknas med (a, b) eller $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, där a och b är reella tal. Mängden av alla par av reella tal betecknas med $\mathbb{R}^2$ och kallas för planet.

• Ett trippel av reella tal betecknas med (a, b, c) eller $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, där a, b, och c är reella tal. Mängden av alla trippel av reella tal betecknas med $\mathbb{R}^3$ och kallas för rummet.

• En sekvens av n reella tal betecknas med $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ eller $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix}$, där $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är reella tal. Mängden av alla n-sekvenser av reella tal betecknas med $\mathbb{R}^n$ och kallas för vektor rummet av dimension n.

2. **Matriser** Följande *tabel* av reella tal kallas för $n \times k$ matris (n är antalet av rader och k är antalet av kolonner):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

Till exempel:

- $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ är 3×1 matris.
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ är 1×3 matris.
- $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ är 3×2 matris.

3. **Punkter och vektorer i planet.** En punkt eller en vektor i planet är bara ett element av planet, dvs ett par av reella tal. Skillnad mellan en punkt och en vektor

är geometrisk föreställning. Vi föreställer en opunkt (a, b) i $\mathbb{R}^2$ som en prick eller litet kors i planet med koordinaterna (a, b). Punkten med koordinaterna $(0, 0)$ kallas för origo och betecknas med O.

Vi tänker om en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ som en riktad sträck mellan origo $(0, 0)$ och punkten med koordinaterna (a, b). Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kallas för noll vektor i planet och ofta betecknas med $\vec{0}$.

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ för standardbasen i $\mathbb{R}^2$.

4. **Punkter och vektorer i rummet.** Liknade i rummet. En punkt eller en vektor i rummet är bara ett element av rummet, dvs ett trippel av reella tal. Skillnad mellan en punkt $A = (a, b, c)$ och en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ är geometrisk föreställning.

Vi tänker om en punkt som en punkt i $\mathbb{R}^3$ och föreställer den som en prick eller litet kors i rummet med koordinaterna (a, b, c). Punkten med koordinaterna $(0, 0, 0)$ kallas för origo och betecknas med O.

Vi tänker om en vektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ som en riktad sträck mellan origo $(0, 0, 0)$ och punkten med koordinaterna (a, b, c). Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ kallas för noll vektor i rummet och betecknas med $\vec{0}$.

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ för standardbasen i $\mathbb{R}^3$.

5. **Punkter och vektorer i $\mathbb{R}^n$.** En punkt eller en vektor i vektor rummet $\mathbb{R}^n$ är bara ett element i $\mathbb{R}^n$, dvs en sekvens av n-reella tal. En punkt i $\mathbb{R}^n$ betecknas med $P = (x_1, \cdots, x_n)$. Punkt $(0, \ldots, 0)$ kallas för origo och betecknas med O. An vektor i

$\mathbb{R}^n$ betecknas med $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. Vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ kallas för noll vektor i $\mathbb{R}^n$ och betecknas med $\vec{0}$.

Vi också använder följande notation:

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \cdots \qquad \vec{e_n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

och kallar $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ för standardbasen i $\mathbb{R}^n$.

6. **Operationer med vektorer I.** Vad kan vi göra med vektorer?

- Vi kan ta **längden** av en vektor. Längden av $\vec{v}$, betecknas med $||\vec{v}||$. Längden kan beräknas med hjälp av Pythagorean sats som ger:
  - i $\mathbb{R}^2$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. $||\vec{v}|| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Till exempel $\left|\left|\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$.
  - i $\mathbb{R}^3$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

    $$||\vec{v}|| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}. \text{ Till exempel } \left|\left|\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right|\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}.$$
  - i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$. $||\vec{v}|| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}$.

  En vektor som har längden 1 kallas för **enhetsvektor**. Till exempel $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix}$ är enhetsvektorer i planet, och $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$ är enhetsvektorer i rummet.

  Noll vektorn har längden 0.
- Vi kan multiplicera en vektor med ett reell tal. Låt λ vara ett reell tal.

– i $\mathbb{R}^2$. $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$.

– i $\mathbb{R}^3$. $\lambda \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}$.

– i $\mathbb{R}^n$. $\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{bmatrix}$.

Till exempel, $2 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix}$, $-3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 9 \end{bmatrix}$.

Märka också att $0\vec{w} = \vec{0}$.

Märka att om $\vec{v} \neq 0$, då $\frac{1}{||v||}\vec{v}$ är en enhetsvektor (vektor av längden 1).

Hur kan vi föreställa vektor $-\vec{v}$? Rita vektor $\vec{v}$. Vektor $-\vec{v}$ är den vektor som ligger på samma linjen som $\vec{v}$, har samma längden som $\vec{v}$ men har motsatt riktning.

- Två vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ kallas för **parallella** om det finns ett skalär λ så att $\lambda\vec{v} = \vec{w}$.

7. **Uppgift.**
- Undersöka om vektorer $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -8 \\ 16 \end{bmatrix}$ i $\mathbb{R}^2$ är parallella.
- Undersöka om vektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -3 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$ är parallella.

8. **Uppgift.** Bestäm alla värde på a so att $\begin{bmatrix} 2a-1 \\ -3 \end{bmatrix}$ är parallell till $\begin{bmatrix} 4 \\ 18 \end{bmatrix}$.

9**. Operationer med vektorer II.**

- $\boxed{\text{Vi kan addera två vektorer.}}$

– i $\mathbb{R}^2$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$. Vi kan föreställa vektor $\vec{v} + \vec{w}$ på följande sätt. Rita parallellogram med vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som två sidor. Då $v + w$ är diagonalen av den parallellogram.

– i $\mathbb{R}^3$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix}$.

Vi har samma geometrisk föreställning av vektor addition i rummet. Rita parallellogram med vektorer $\vec{v}$ och $\vec{w}$ som två sidor. Då $\vec{v}+\vec{w}$ är diagonalen av den parallellogram.

– i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix}$.

- $\boxed{\text{Vi kan subtrahera två vektorer.}}$

  – i $\mathbb{R}^2$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{bmatrix}$.

  – i $\mathbb{R}^3$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ v_3 - w_3 \end{bmatrix}$.

  – i $\mathbb{R}^n$. Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ och $\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$. Då $\vec{v} - \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \\ \vdots \\ v_n - w_n \end{bmatrix}$.

  Hur kan vi föreställa vektorn $\vec{v} - \vec{w}$? Vi kan göra detta på två sätt:

  – Hitta vektor $-\vec{w}$. Rita parallellogram med sidorna $\vec{v}$ och $-\vec{w}$. Diagonalen av parallellogramet föreställer $\vec{v} - \vec{w}$.

  – Märka att $(\vec{v} - \vec{w}) + \vec{w} = \vec{v}$. Det betyder att vi kan föreställa $\vec{v} - \vec{w}$ på följande sätt. Rita parallellogram med en sida $\vec{w}$ och diagonalen $\vec{v}$. Den andra sidan av parallellogramet föreställer $\vec{v} - \vec{w}$.

10. **Proposition.** Längden har följande egenskaper:

- $||\vec{v}|| \geq 0$ och $||\vec{v}|| = 0$ om och endast om $\vec{v} = \vec{0}$.
- $||\lambda \vec{v}|| = |\lambda| ||\vec{v}||$.
- $||\vec{v} + \vec{w}|| \leq ||\vec{v}|| + ||\vec{w}||$.

Till exempel, $\left|\left| -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right|\right| = 2 \left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right|\right| = 2\sqrt{1+4+9} = 2\sqrt{14}$.

$$\left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right|\right| = \left|\left| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{4+49} = \sqrt{53}$$

$$\left|\left| \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right|\right| + \left|\left| \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \right|\right| = \sqrt{1+4+9} + \sqrt{1+16} = \sqrt{14} + \sqrt{17}$$

Altså:

$$\sqrt{53} \leq \sqrt{14} + \sqrt{17}$$

11. Låt $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ vara vektorer och λ_1,λ_2,..., λ_n vara reella tal. Uttryck:

$$\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n$$

kallas för en **linjär kombination** av vektorer $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$ med koefficienter λ_1,λ_2,..., λ_n.

12. **Uppgift.** Bestäm linear kombination av $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ med koefficienterna -1, 0.5, och 1/3.

13. **Uppgift.** Är det sant att all vektorer i $\mathbb{R}^3$ kan skrivas som linear kombination av vektorer e_1, e_2, och e_3 i den standardbasen av $\mathbb{R}^3$?

14. **Operationer med punkter.** Vad kan vi göra med punkter?

- $\boxed{\text{Vektorn mellan två punkter.}}$ Om $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ och $Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ är punkter i $\mathbb{R}^n$, kan vi bygga en vektor $\vec{PQ}$ som har koordinaterna $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{bmatrix}$. Ibland föreställer vi vektorn $\vec{PQ}$ som en riktad sträck som börjar i P och slutar i Q. Vi säger att $\vec{PQ}$ är vektorn från P till Q.
  Märka att $\vec{PQ} = -\vec{QP}$.
  VIKTIG: vi kan inte addera eller subtrahera punkter, eller multiplicera en punkt med ett tal. Vi kan bra ta vektor från en punkt till en annan punkt.
- $\boxed{\text{Vi kan beräkna avståndet mellan två punkter.}}$ Avståndet mellan punkter P och Q är definierat som längden av vektor $\vec{QP}$. Till exempel avståndet mellan $(2, 4)$ och $(-1, 3)$ är $\sqrt{(-1-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{10}$.

15. **Uppgift.** Hitta koordinaterna av vektor från punkt $(1, 0, -1)$ till $(0, -2, -5)$ och beräkna avståndet mellan punkterna.

16. **Operationer med punkter och vektorer.**

- $\boxed{\text{Vi kan addera en vektor till en punkt och få en punkt.}}$
  - i $\mathbb{R}^2$. Låt $P = (p_1, p_2)$ vara en punkt och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ vara en vektor i planet.
    Vi definierar $P + \vec{v}$ som en punkt i planet med koordinaterna:
    $$P + \vec{v} := (p_1 + v_1, p_2 + v_2).$$
    Vi kan föreställa punkten $P+\vec{v}$ på följande sätt: flytta punkten P i riktning av vektor $\vec{v}$.
    Till exempel om $P = (1, -3)$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ då $P + \vec{v}$ är en punkt som har koordinaterna $P + \vec{v} = (-1, 1)$

- i $\mathbb{R}^3$. Likadana i rummet. Låt $P = (p_1, p_2, p_3)$ vara en punkt och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$ vara en vektor i rummet. Vi definierar $P + \vec{v}$ som en punkt i rummet med koordinaterna:
$$P + \vec{v} := (p_1 + v_1, p_2 + v_2, p_3 + v_3).$$
Vi kan föreställa punkten $P+\vec{v}$ på följande sätt: flytta punkten P i riktning av vektor $\vec{v}$.
- i $\mathbb{R}^n$. Låt $P = (p_1, \dots, p_n)$ vara en punkt och $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ vara en vektor i $\mathbb{R}^n$. Vi definierar $P + \vec{v}$ som en punkt i $\mathbb{R}^n$ med koordinaterna:
$$P + \vec{v} = (p_1 + v_1, \dots, p_n + v_n).$$
Märka att $P + \vec{PQ} = Q$.