

Studiehandledning SF1661 Perspektiv på Matematik HT2016, Civilingenjör och lärare åk 1

Undervisningen på kursen ges i form av föreläsningar och övningar.

Under föreläsningarna presenteras teori, begrepp och viktiga metoder.

Vid övningarna, där ni är uppdelade i två grupper, är den egna aktiviteten i fokus. Vissa övningstillfällen kallas för *Workshops*, det innebär att ni studenter arbetar gruppvis under handledning med ett sammanhängande arbetsmaterial med ett visst tema. Vissa andra övningstillfällen är examinerande.

I läsanvisningen används följande färgbeteckningar:

F=Föreläsning **Ö**=Övningstillfälle **Ö** = Övningstillfälle med löpande examination

Litteratur (finns på Kårbokhandeln)

WIM = Courant & Robbins, *What is Mathematics?* 2:a upplagan, reviderad av Stewart, I. Oxford university press, 1996. ISBN13: 9780195105193. ISBN10: 0195105192

MA = Johansson & Öhman, *Introduktion till högre studier i Matematik*, LIBER, 2011. ISBN13: 978-91-47-10536-6

Kompletterande material som distribueras via kurshemsidan på KTH Social.

Eget arbete med litteratur och uppgifter

Det är viktigt att arbeta aktivt och kontinuerligt med kursen även utanför lektionstid. **Följ läsanvisningarna** som finns på de följande sidorna: läs de angivna **litteraturavsnitten** och arbeta med lösa övningsuppgifter. Tänk speciellt på att **förbereda** dig inför undervisningstillfällena.

Att **läsa** den angivna litteraturen är lika viktigt som att räkna uppgifter.

De **rekommenderade uppgifterna** är tillsammans med seminarieuppgifterna valda för att motsvara kraven för godkänt i kursen. **Extra uppgifter** tränar främst färdigheter som krävs för högre betyg. Rekommenderade uppgifter och extra uppgifter är i första hand tänkta för arbete utanför lektionstid, och bör göras i anslutning till motsvarande undervisningstillfälle. Vissa av dessa uppgifter kommer även att behandlas på övningarna.

Examination

Examinationen sker dels löpande under kursens gång genom seminarier, där vissa hemuppgifter (seminarieuppgifter) redovisas, och genom kontrollskrivningar, och dels genom en avslutande tentamen. Tentan är det enda obligatoriska momentet. Godkända seminarier och kontrollskrivningar får tillgodoräkans mot uppgifter på tentan. Detaljerad information finns på kurshemsidan.

För att tydliggöra att det är viktigt att läsa teorin i kurslitteraturen kommer det vid **såväl seminarietillfällena som vid kontrollskrivningar och tentamen också att ställas kontrollfrågor på de aktuella avsnitten i kurslitteraturen.**

Kurshemsida

Kurshemsidan finns på KTH Social, <https://www.kth.se/social/course/SF1661>

Vecka 35	
Må Föreläsning 0	Introduktion. Naturliga tal. Primaltal.
Ti Föreläsning 1	Positionssystem. Potenser.
On Övning 1	Workshop: Delbarhet och primtal.
To Föreläsning 2	Hela tal. Rationella tal och reella tal.
Fr Övning 2	Potenser. Rationella och reella tal.
Vecka 36	
Må Övning 3	Workshop: Decimalbråksrepresentation av reella tal.
Ti Övning 4	Seminarium 1
On Föreläsning 3	Mängdlära och logik.
To Föreläsning 4	Logik. Kardinalitet.
Fr Övning 5	Mängdlära och logik. Att läsa och skriva matematik.
Vecka 37	
Må Övning 6	Reserv och repetition. Räknestuga
Ti Övning 7	Kontrollskrivning 1
On Föreläsning 5	Ekvationslösning. Polynom och Faktorsatsen.
To Föreläsning 6	Olikheter och absolutbelopp
Fr Övning 8	Polynom, ekvationer, olikheter och absolutbelopp.
Vecka 38	
Må Övning 9	Workshop: Avståndsformeln och cirkelns ekvation.
Ti Övning 10	Seminarium 2.
On Föreläsning 7	Summor och produkter. Induktionsbevis.
To Föreläsning 8	Binomialsatsen och Pascals triangel.
Fr Övning 11	Summor, produkter. Induktion. Binomialsatsen.
Vecka 39	
Må Övning 12	Repetition och reserv. Räknestuga.
Ti Övning 13	Kontrollskrivning 2.
On Föreläsning 9	Funktionsbegreppet. Trigonometriska funktioner.
To Föreläsning 10	Exponential- och Logaritmfunktioner.
Fr Övning 14	Workshop: Funktioner, ekvationer och grafer.
Vecka 40	
Må Övning 15	Trigonometriska funktioner och ekvationer.
Ti Övning 16	Exponentialfunktioner och logaritmer. Ekvationer.
On Övning 17	Seminarium 3.
On Föreläsning 11	Komplexa tal.
To Föreläsning 12	Komplexa tal. Faktorisering av polynom.
Fr Övning 18	Komplexa tal och faktorisering av polynom
Vecka 41	
Må Föreläsning 13	Derivata och Integral – tolkningar, tillämpningar och samband.
Må Övning 19	Workshop: Derivata och integraler.
Fr Övning 20	Seminarium 4.
Vecka 42	
Må Föreläsning 14	Reserv och repetition.
Må Övning 21	Reserv och repetition.
Fr	Tentamen

Vecka 35

Introduktionsföreläsning, 29/8. Kursintroduktion. Naturliga tal. Primtal.

Litteratur

- **WIM** sid 1 – 4 (Ch 1, § 1, 1. *Laws of arithmetic*).
- **WIM** sid 21 – 24. Beviset av att det finns oändligt många primtal på sidan 22 är viktigt, och det skall du kunna genomföra själv. Stycket som börjar på rad 11 på sidan 23 läses mer översiktligt som orientering. Det bevis som börjar 11 rader nerifrån på sidan 23 och fortsätter på sidan 24 kommer inte att examineras. Ni kommer att återkomma till dessa frågor i kursen Diskret Matematik i vår.
- **WIM** sid 25 – 31. Läs detta noga så att du förstår och kan följa med i texten. Du skall kunna
 - redogöra för innebörden av *Primtalssatsen (The Prime Number Theorem)*, dvs du skall kunna förklara vad satsen säger (men inte redogöra för beviset).
 - redogöra för innebörden av *Goldbachs förmodan*.
 - redogöra för det problem som beskrivs i sista stycket på sidan 31 innan §2. (Två på varandra följande udda tal p och $p + 2$ som bägge är primtal brukar kallas för *primtalstvillingar*.)

Föreläsning 1, 30/8. Positionssystem. Potenser.

Förberedelser. Läs igenom litteratur som hör till föreläsningen (se nedan).

Litteratur

Positionssystem:

- **WIM** sid 4 – 9 (2. *The representation of integers* och 3. *Computation in other systems than the decimal*)

Potenser:

- **Kompletterande material** på kurshemsidan.

Rekommenderade uppgifter

WIM: 1 - 4, sid 8.

Samtliga uppgifter i det kompletterande materialet.

Extra uppgifter

WIM, uppgift på sidan 9.

Övning 1, 31/8. Workshop om delbarhet och primtal

Material till workshopen finns på kurshemsidan på KTH Social. Skriv ut och ta med till övningen.

Förberedelser: Repetera **WIM** sid 21 – 24.

Gör de förberedande uppgifterna i arbetsmaterialet innan du kommer till övningen, annars kommer du inte att hinna göra det du ska under övningstillfället.

Föreläsning 2, 1/9. Hela tal, rationella tal och reella tal.

Förberedelser. Läs igenom litteraturavsnitten.

Litteratur.

- **MA** avsnitt 1.1 och 1.4
- **WIM** sid 52 – 63.

Rekommenderade uppgifter

MA 1.1:1 – 1.1:9 (sid 13),

Extra uppgift. **WIM** Uppgift 1 och 2 sid 60 – 61.

Övning 2, 2/9.

Gruppdiskussioner kring litteraturen hörande till föreläsning 0, 1 och 2.

Räknestuga med fokus på uppgifterna hörande till föreläsning 0, 1 och 2.

Vecka 36

Övning 3, 5/9. Workshop om decimalbråksrepresentation av reella tal.

Material till workshopen finns på kurshemsidan på KTH Social. Skriv ut och ta med till övningen.

Förberedelser: Läs igenom den angivna litteraturen.

Gör de förberedande uppgifterna i arbetsmaterialet innan du kommer till övningen, annars kommer du inte att hinna göra det du ska under övningstillfället.

Litteratur

- **WIM** sid 66 – 67 (4. *Rational Numbers and Periodic Decimals*). Du ska kunna redogöra för varför det är precis de rationella talen som har periodiska eller ändliga decimalbråksutvecklingar.
- **WIM** sid 68 – 71 (5. *General Definition of Irrational Numbers by Nested Intervals*). Du skall förstå och kunna redogöra för den grundläggande idén om hur följder av krympande intervall kan användas för att *definiera* irrationella tal.
- **WIM** sid 71 – 72 (6. *Alternative Methods of Defining Irrational Numbers. Dedekind Cuts.*) Detta avsnitt kommer inte att examineras, men läs det för att få en smak av vad det handlar om.

Övning 4, 6/9. Seminarium 1.

Diskussion och redovisning av Seminarieuppgifter 1 från vecka 36.

Föreläsning 3, 7/9. Mängdlära och logik.

Föreläsningen behandlar först begreppet *mängder*, och hur dessa betecknas och används inom matematiken. **MA** avsnitt 1.2 är huvudreferenser till denna föreläsning.

En fördjupning ges i de angivna avsnitten i **WIM**. Beteckningarna i **WIM** är delvis annorlunda, och inte helt moderna, se kommentarer och förklaringar i slutet av **WIM** (§5 *Set-theoretic notation* på sid 494 – 495).

Föreläsningen behandlar också logisk slutledning och symboler för logiska uttryck.

Förberedelser. Läs igenom avsnitt 1.2 och 1.3 i **MA**.

Litteratur.

- **MA** avsnitt 1.2 och 1.3
- Fördjupning; **WIM** sid 108 – 114, läs §5 *Set-theoretic notation* på sid 494 – 495 i **WIM** parallellt.

Rekommenderade uppgifter

MA 1.2: 1 – 12 (sid 18-19).

Föreläsning 4, 8/9. Mer om logik. Kardinalitet.

Förberedelser. Andra delen av föreläsningen kommer att diskutera hur "stora" de olika oändliga talmängderna (de naturliga talen, de rationella talen, osv) är – kan man tala om olika stora oändliga mängder? Det precisa begreppet är mängders *kardinalitet*.

Att fundera på inför föreläsningen: De jämna naturliga talen heltalen $\{2, 4, 6, \dots\}$ kan tyckas vara "hälften så många" som mängden av alla naturliga tal. Å andra sidan kan man utifrån uppställningen

Nat. tal	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
Jämna tal	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	...

frestas att säga att mängderna är "lika stora".

Läs också igenom den anvisande litteraturen i **WIM**.

Litteratur:

Logik:

- **MA** avsnitt 1.3

Kardinalitet:

- **WIM** sid 77 – 83 (1. *Fundamental concepts* och 2. *The Denumerability of the Rational Numbers and the Non-Denumerability of the Continuum*). Läs detta noga. Du ska

- förstå vad som menas *uppräknliga* (eng: *denumerable, countable*) respektive *överuppräknliga* (eng: *non-denumerable, non-countable*) mängder.

- kunna redogöra för varför mängden av de rationella talen är uppräknligt oändlig, medan de reella talen är överuppräknliga.

- **WIM** sid 83 – 88, läses översiktligt som orientering.

Rekommenderade uppgifter

MA 1.3: 1, 2, 3, 5, 6, 7 (sid 27 – 29). 1.4: 2 – 5 (sid 35).

WIM Uppgift 1 på sidan 80.

Extra uppgift. **WIM** Uppgift 2 sid 81.

Övning 5, 9/9. Mängdlära och logik. Att läsa och skriva matematik.

Diskussion av litteratur och uppgifter hörande till föreläsning 3 och 4.

Om att läsa och skriva matematik. Bland annat

- Vad betyder " $=$ " ?

- Om vikten av att

- skriva tydligt, med fullständiga meningar och ett korrekt språk;

- använda matematiska begrepp och symboler på ett korrekt sätt.

Vecka 37

Övning 6, 12/9. I. Reserv och repetition. Räknestuga.

Förberedelser. Under övningen kommer du att ha möjlighet att få individuell hjälp av din lärare, tänk därför igenom om vad du vill fråga om.

Övning 7, 13/9. Kontrollskrivning 1.

Kontrollskrivning på det vi har arbetet med under vecka 36 och 37.

Föreläsning 5, 14/9. Ekvationslösning. Polynom och Faktorsatsen.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen.

Litteratur

- **MA** avsnitt 2.1 och 2.2.

Rekommenderade uppgifter

MA 2.1: 1 – 4 (sid 46 – 47), 2.2: 1 – 6 (sid 53).

Föreläsning 6, 15/9. Olikheter och absolutbelopp.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen.

Föreläsningen kommer bland annat att behandla begreppet *absolutbelopp* av reella tal, titta i din gymnasielärobok vad som står där om begreppet. Var beredd att redogöra för hur detta begrepp presenteras och definieras i din gymnasiebok.

Litteratur

- **MA** avsnitt 2.3 och 2.4

Rekommenderade uppgifter

MA 2.3: 1 -4 (sid 55 – 56), 2.4: 1 – 6 (sid 61 – 62)

Övning 8, 16/9. Polynom, olikheter och absolutbelopp.

Diskussion av litteratur och övningsuppgifter hörande till föreläsning 5 och 6.

Vecka 38

Övning 9, 19/9. Workshop: Avståndsformeln och cirkelns ekvation.

Material till workshopen finns på kurshemsidan på KTH Social. Skriv ut och ta med till övningen.

Ta med en grafitande räknare, eller dator eller läsplatta med motsvarande programvara, till övningen.

Förberedelser: **Gör de förberedande uppgifterna i arbetsmaterialet innan du kommer till övningen, annars kommer du inte att hinna göra det du ska under övningstillfället.**

Övning 10, 20/9. Seminarium 2.

Diskussion och redovisning av Seminarieuppgifter 2 från vecka 37 och 38.

Föreläsning 7, 21/9. Summor och produkter. Induktionsbevis.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen. Avsnittet i **WIM** sid 63 - 66 generaliserar geometriska summor till s geometriska serier.

Litteratur

- **MA** avsnitt 3.1 och 3.2 samt 4.1
- **WIM** sid 9 – 15, 63 – 66.

Rekommenderade uppgifter

MA 3.1: 1 – 5 (sid 69 – 70), 3.2: 1 – 7 (sid 76 – 77), 4.1: 1 – 10 (sid 84 – 86).

Extra uppgifter: **WIM** 1, sid 66.

Föreläsning 8, 22/9. Binomialsatsen och Pascals triangel.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen.

Litteratur

- **WIM** sid 16 – 17 (8. *The Binomial Theorem*)
- **MA** avsnitt 4.2

Observera att binomialkoefficienterna tecknas med olika symboler i **WIM** och **MA**. Skrivsättet i **MA** är nuförtiden standard.

Observera också att *definitionen* av binomialkoefficienterna och vad som är *bevisade egenskaper* hos dessa skiljer sig åt mellan **WIM** och **MA**. Spelar det någon roll på vilket sätt man gör det? Finns det didaktiska för- och nackdelar med de två olika framställningarna?

Rekommenderade uppgifter

MA 4.2: 1 – 4, 6 – 13 (sid 93 – 94).

Övning 11, 23/9. Summor och produkter. Induktion. Binomialsatsen.

Diskussion av litteratur och övningsuppgifter hörande till föreläsning 7 och 8.

Vecka 39

Övning 12, 26/9. Repetition och reserv. Räknestuga.

Förberedelser. Under övningen kommer du att ha möjlighet att få individuell hjälp av din lärare, tänk därför igenom om vad du vill fråga om.

Övning 13, 27/9. Kontrollskrivning 2.

Kontrollskrivning 2 omfattande det vi arbetat med under vecka 38 och 39.

Föreläsning 9, 28/9. Funktionsbegreppet. Trigonometriska funktioner.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen.

Litteratur

Trigonometriska funktioner:

- **MA** avsnitt 5.1 – 5.5 . Detta avsnitt är väsentligen en repetition från gymnasiekursen. Lägg märke till begreppen *jämn* respektive *udda* funktion på sidan 109.

- **FK** avsnitt 4.3

Funktionsbegreppet:

- **WIM** sid 272 – 289. De funktioner du har mött tidigare har nog nästan alltid varit funktioner där både definitionsmängden (de värden den oberoende variabeln får anta) och värdemängden (de värden den beroende variabeln kan anta) är delmängder av de reella talen. I detta avsnitt i **WIM** ges många exempel på funktioner med andra definitions- och värdemängder. Du skall kunna

- ge exempel på funktioner med definitions- eller värdemängder andra än delmängder av de reella talen.

- kunna förklara vad som menas med inverterbara funktioner och deras invers, och också exempel på inverterbara funktioner och deras inverser.

- förklara vad som menas med sammansatta (eng *compound, composed*) funktioner och ge exempel på sådana.

Extra litteratur:

- Hans Wallin *Musik, bilder och matematik* (ur boken *Den osynliga matematiken*) och

- Philip J. Davis & Reuben Hersh *Fourier Analysis* (ur boken *The Mathematical Experience*).

Dessa två texter finns på kurshemsidan på KTH Social. Läs dem med fokus på helheten, det matematiska detaljerna kommer inte att examineras. De handlar bägge om s k Fourier-analys, som handlar om hur man kan representera i stort sett godtyckliga funktioner som summor, serier eller integraler av trigonometriska funktioner. De trigonometriska funktionerna är byggstenar med vars hjälp man kan bygga upp andra funktioner, något som är mycket viktigt inom många tillämpningar. Fourier-analysens framväxt är också intimt förknippad med den historiska utvecklingen av funktionsbegreppet.

Rekommenderade uppgifter

MA 5.1: 6, 7 (sid 100). 5.2: 4 – 6 (sid 103). 5.4: 7, 8, 10 – 14, 16 – 18 (sid 116 – 117).

Föreläsning 10, 29/9. Exponential- och logaritmfunktioner.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen.

Litteratur

- **Kompletterande material** på kursens hemsida på KTH Social.

- **WIM** sid 442 – 447 (1. *Definition and Properties of the Logarithm. Eulers' number e.* 2. *The Exponential function.*) Läs detta avsnitt i **WIM** som en orientering om ett alternativt, och matematiskt mer tillfredsställande sätt, att definiera *först* logaritmfunktionen som en integral, och *därefter* exponentialfunktionen som inversen till logaritmfunktionen. Fundera på

- Vad är fördelen med att göra på detta sätt?

- Vilka didaktiska skäl kan ligga bakom att man i gymnasiet och i inledande kurser på högskolan väljer att istället börjar med att införa exponentialfunktionen och sedan logaritmfunktionen som dess invers?

Rekommenderade uppgifter:

Samtliga uppgifter i det kompletterande materialet (se kurshemsidan)

Övning 14, 30/9. Workshop om funktioner, ekvationer och deras grafer.

Material till workshopen finns på kurshemsidan på KTH Social. Skriv ut och ta med till övningen. Ta också med en grafritande miniräknare eller en platta/laptop med motsvarande programvara.

Förberedelser: **Gör de förberedande uppgifterna i arbetsmaterialet innan du kommer till övningen, annars kommer du inte att hinna göra det du ska under övningstillfället.**

Vecka 40

Övning 15, 3/10. Trigonometriska funktioner och ekvationer.

Arbete med

MA 5.4: 2 – 6 , 19 – 24 (sid 116 – 117), 5.5: 1 – 6 (sid 119)

Övning 16, 4/10. Exponential- och logaritmfunktioner. Ekvationer med exponential- och logaritmfunktioner.

Diskussion av litteratur och övningsuppgifter hörande till föreläsning 10.

Övning 17, 5/10. Seminarium 3.

Diskussion och redovisning av Seminarieuppgifter 3 från vecka 39 och 40.

Föreläsning 11, 5/10. Komplexa tal.

Förberedelser. Repetera om komplexa tal t. ex. i din gymnasiebok. Läs också angivet avsnitt i **MA** och **WIM**.

Litteratur

- **MA** avsnitt 6.1 – 6.3.

- **WIM** sid 88 – 100

I **WIM** kallas den vinkel som hör till den polära framställningen av ett komplext tal z för "the angle of z ", medan man nu för tiden vanligen säger "an argument for z ", på svenska "ett argument till z " eller, något slarvigt, för " z 's argument" (varför är det lite oprecist att säga så?)

Rekommenderade uppgifter

MA 6.1: 1 – 5 (sid 133 – 134), 6.3: 1 – 7 (sid 140 – 141).

WIM uppgift på sidan 94, 9 rader nedifrån

Extra uppgifter. **WIM** Uppgift 1 sid 100.

Föreläsning 12, 6/10. Komplexa exponentialfunktionen. Faktorisering av polynom.

Förberedelser. Läs igenom den angivna litteraturen.

Litteratur

- **MA** avsnitt 6.4 – 6.6.

- **WIM** sid 101 – 103 (4. *The Fundamental Theorem of Algebra*). Här beskrivs grundläggande egenskaper för polynom, om deras nollställen och hur de kan faktoriseras. Det är viktigt att du förstår vad dessa egenskaper innebär, och att du kan följa det resonemang (bevis) som genomförs.

Rekommenderade uppgifter

MA 6.4: 1 – 3 (sid 144), 6.5: 1 – 3 (sid 146 – 147), 6.6: 1 – 3 (sid 151).

Övning 18, 7/10. Komplexa tal. Faktorisering av polynom.

Diskussion av litteratur och övningsuppgifter hörande till föreläsning 11 och 12.

Vecka 41

Föreläsning 13, 10/10. Derivata och Integral; tolkningar, tillämpningar och samband.

Förberedelse: Läs igenom den angivna litteraturen.

Litteratur

- **WIM** sid 398 – 404. Det är viktigt att du förstår hur den bestämda integralen definieras som ett gränsvärde av allt mer finfördelade summor – det är den definitionen som svarar mot tillämpningar som att "sträckan är integralen av hastigheten över tidsintervallet" m fl .

- **WIM** sid 414 – 421 (Fr o m 1. *The derivative as a slope* fram till 4. *Derivatives of trigonometric functions*). Även för derivatan är det definitionen som är nyckeln till att förstå de tolkningar som derivaten har i olika tillämpningar.

- **WIM** sid 423 – 426, speciellt fr o m sid 424 "Newton's first ..." till "It was observed by Galileo ..."
Observera hur derivatans definition naturligt ger tolkningen att "hastighet = derivata av sträcka med avseende på tid".

- **WIM** sid 433 – 436 (§4 *LEIBNIZ NOTATION AND THE "INFINITELY SMALL"*) Läs detta idéhistoriska avsnitt som en orientering.

Att man kan beräkna integraler med hjälp av primitiva funktioner (anti-derivator), som man kanske tar som så självklart att man kanske tänker på det som definitionen, är i själva verket ett djupt och långt ifrån självklart resultat som man resonerar sig fram till utifrån definitionerna av integral och derivata.

- **WIM** sid 436 – 439 (1. *The Fundamental Theorem*). Här skisseras ett bevis för sambanden mellan derivata och integral. Läs ordentligt och var noga med att du förstår logiken i resonemanget.

Observera också det didaktiska resonemanget på sidan 438 om risken med att införa termen "obestämd integral" (eng *indefinite integral*) innan den bestämda integralen definieras.

- **WIM** sid 464 – 469 (2. *The Integral* och 3. *Other Applications of the Concept of Integral. Work. Length.*) Observera hur (den bestämda) integralens definition tillåter oss att i olika tillämpningar tolka integraler som uttryck inte bara "area under kurvan" utan också som t ex fysikaliskt arbete eller en kurvas längd.

Övning 19, 10/10. Workshop om derivata och integraler

Material till workshopen finns på kurshemsidan på KTH Social. Skriv ut och ta med till övningen.

Förberedelser: [Läs igenom och fundera på uppgifterna i arbetsmaterialet.](#)

Övning 20, 14/10. Seminarium 4.

Diskussion och redovisning av Seminarieuppgifter 4 från vecka 41 och 42.

Vecka 42

Föreläsning 14, 17/10. Reserv och repetition.

Övning 21, 17/10. Reserv och repetition.