Föreläsning 2
Reglerteknik AK

©Bo Wahlberg
Avdelningen för Reglerteknik, KTH

1 september, 2016

Introduktion

Förra gången:

- Dynamiska system = Differentialekvationer
- Återkoppling

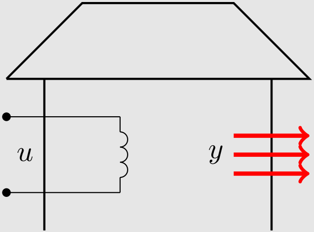
Dagens program:

- PID-reglering

Exempel

Example (Temperaturreglering)

Hur reglerar vi temperaturen i ett hus?



$$v \begin{cases} y & = \text{temp. i huset} \\ u & = \text{tillförd effekt} \\ v & = \text{temp. utomhus} \\ r & = \text{önskad temp.} \end{cases}$$

Modell:

Betrakta en värmebalans:

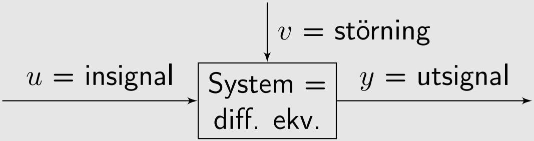
$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \text{tillförd effekt - bortförd effekt}$$

Example (Temperaturreglering, fort.)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\, y(t) = \beta\big(u(t) - \alpha[y(t) - v(t)]\,\big)$$

Förenkla genom att ta $\beta = 1$ (skalning).

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = u(t) + \alpha v(t)$$



Öppen Styrning

Example (Temperaturreglering)

Antag att $r = 20°$C. Hur ska vi välja $u(t)$?

Lösning:

I. Antag att $\alpha = 1$ och $v = 0$. Välj

$$u(t) = \begin{cases} 20, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{y} + y = 20, \; y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(t) = 20(1 - e^{-t}) \rightarrow 20, \; t \rightarrow \infty$$

OK!

Problem med Öppen Styrning

Example (Temperaturreglering)

II. Välj $u(t)$ som i **I** men antag att $\alpha \neq 1$ och $v(0) = -10$.

$$\Rightarrow \dot{y} + \alpha y = 20 - 10\alpha,\ y(0) = -10$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{20}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right) - 10$$

$$\Rightarrow y(t) \to \frac{20}{\alpha} - 10,\ \text{då } t \to \infty$$

Vilket ej är OK (Såvida inte $\alpha = 2/3$)!

Använd Återkoppling

Example (Temperaturreglering)

$$\begin{cases} y(t) & : \text{temp. inne} \\ u(t) & : \text{el-effekt} \\ v(t) & : \text{temp. ute} \end{cases} \implies \dot{y}(t) + \alpha y(t) = u(t) + \alpha v(t)$$

Mål: Att ha $r(t)$ grader inne.

Strategi:
Öka $u(t)$ ifall det är för kallt inne.
Minska $u(t)$ ifall det är för varmt inne.

Hur mycket?

P-reglering

Öka styrsignalen proportionellt mot storleken av felet!

$$u(t) = K[\,r(t) - y(t)\,] = Ke(t)$$

där $K > 0$ är en konstant.

Negativ återkoppling!

Jämför med en termostat (till/från, pulserande).

P-reglering

Example (Temperaturreglering, P-reglering)

Lösning:

$$\dot{y} + \alpha y = u + \alpha v$$

$$\Rightarrow \dot{y} + \alpha y = Kr - Ky + \alpha v$$

$$\Rightarrow \dot{y} + (\alpha + K)y = Kr + \alpha v$$

Sätt $r = 20$, $v = -10$ och $y(0) = 0$.

$$\Rightarrow y(t) = \frac{K}{\alpha + K} \cdot 20 \cdot \left(1 - e^{-(\alpha+K)t}\right) + \\ + \frac{\alpha}{\alpha + K} \cdot (-10) \cdot \left(1 - e^{-(\alpha+K)t}\right)$$

P-reglering

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

$$\Rightarrow y \to \frac{20}{1+\frac{\alpha}{K}} - \frac{10}{1+\frac{K}{\alpha}} \approx 20,\ t \to \infty$$

om K är stor, trots att $\alpha \neq 1$ och $v = -10$.

Bra, men

Stationärt fel: $u = Ke > 0$ krävs för att hålla rätt temperatur.

Kommentar:
Stationärt = "när det har svängt in sig"
Transient = "medan det svänger in sig"

Med återkoppling

- minskas inverkan av störningar och modellfel.
- ökar snabbheten vid insvängning (servo).
  Här från $e^{-\alpha t}$ till $e^{-(\alpha+K)t}$.
- stabiliseras instabila system, t.ex. Segway

Vad kan gå fel?

- Systemet uppför sig inte som man tror
- Begränsningar i styrförmåga
- Återkoppling kan skapa instabilitet

PID-reglering

PID (Propotionell Integrerande Deriverande) reglering löser större delen av alla reglerproblem.

Example

En processindustri har över 1000 PID-regulatorer.

$$\xrightarrow{\;e\;} \boxed{\text{PID}} \xrightarrow{\;u\;}$$

Definition (PID-Regulatorn)

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

alt.

$$u(t) = K_P e(t) + K_I\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau + K_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$$

PID-regulatorn

Den har tre stycken "rattar" vi kan finjustera.

- ***P*ropotionell återkoppling**: $Ke(t)$ betraktar felet just nu
- ***I*ntegrerande återkoppling**: $\frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ betraktar hur felet *har* uppfört sig
- ***D*eriverande återkoppling**: $T_D\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}$ betraktar hur felet *kommer* att uppföra sig

Hur ska man ställa in K, T_I och T_D?

$\Longrightarrow$ LAB 1!

PI-reglering

PI-regulator: $u(t) = K\Big[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big]$

Vi har vid ett stationärt tillstånd att $e(t) = 0$, annars ökar eller minskar $u(t)$ pga av integralen.

Insvängning: Antag att $u = \bar{u}$ krävs för $e(t) = 0$. Studera

$$\bar{u} = K\Big[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big]$$

Deriverar vi detta uttryck får vi

$$K\Big[\dot{e} + \frac{1}{T_I}e\Big] = 0$$

$$\Rightarrow e(t) = C \cdot e^{-t/T_I}$$

Om T_I är liten får vi en snabbare insvängning mot referensvärdet. (*Försämrar stabilitet!*)

Integratoruppvridning

Antag att vi har en högsta tillåten styrsignal u_{max}, dvs. $u(t) \leq u_{\mathsf{max}}$.
Om vi använder en PID-regulator och uppnår

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right] > u_{\mathsf{max}}$$

Example (Bil med husvagn i uppförsbacke!)

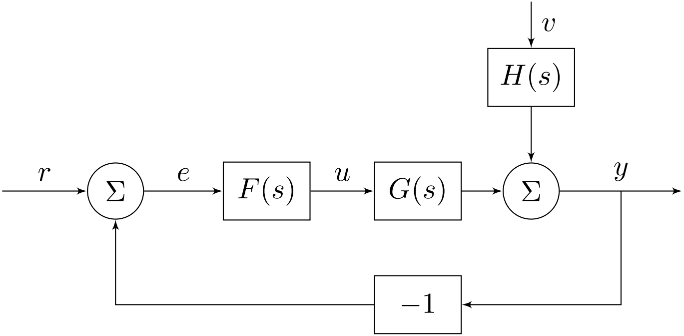
Integratoruppvridning

Integraldelen växer ($e(t) > 0$) trots att man inte kan ställa ut mer. När man väl har nått $e(t) = 0$, måste man ha ett negativt fel ($e(t) < 0$) så att integraldelen minskar till rätt värde.

Man löser detta genom att bara integrera när felet är litet (*anti-windup*).

- JAS 39 Gripen, 1993, Långholmen (YouTube)
- JAS 39 Gripen, 1989, Pilot Induced Oscillation. "Piloten för snabb P-reglering" <jmfr bilkörning, cykel>

Återkoppling mha Blockdiagram



$$Y(s) = \frac{G(s)F(s)}{1+G(s)F(s)}R(s) + \frac{H(s)}{1+G(s)F(s)}V(s)$$

PI-Regering

$$u(t) = K\left[e(t) + \frac{1}{T_I}\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]$$

$$U(s) = K\left[1 + \frac{1}{T_I}\frac{1}{s}\right]E(s) \quad \Rightarrow \quad F(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I}\frac{1}{s}\right)$$

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

$$G(s) = \frac{1}{s+\alpha}, \quad H(s) = \frac{\alpha}{s+\alpha}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K(1+T_I s)}{T_I s^2 + T_I(\alpha+K)s + K}R(s) \\ &\quad + \frac{\alpha T_I s}{T_I s^2 + T_I(\alpha+K)s + K}V(s) \end{aligned}$$

PI-Regering

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

Stabilt? Poler i H.H.P.?

$$s^2 + (\alpha + K)s + K/T_I$$

Vi kan välja K och T_I så vi får godtyckliga poler i V.H.P.

Ex: Poler i -1: $(s+1)^2 = s^2 + 2s + 1 \Rightarrow$
$K = (2 - \alpha)$ och $T_I = (2 - \alpha)$

PI-Regering

Example (Temperaturreglering, P-reglering, fort.)

Stationärt fel?

$$r(t) = 20 \;\Rightarrow R(s) = \frac{20}{s}, \quad v(t) = -10 \;\Rightarrow V(s) = \frac{-10}{s},$$

Slutvärdes-satsen
Antag stabilt (poler i V.H.P.). Då existerar

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

$$Y(s) = \frac{K(1+T_I s)}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} R(s) + \frac{\alpha T_I s}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} V(s)$$

vilket medför

$$sY(s) = \frac{K(1+T_I s)}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} 20 + \frac{\alpha T_I s}{T_I s^2 + T_I(\alpha + K)s + K} (-10)$$

och

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = 20 + 0$$

Inget stationärt fel oseroende av utomhustemperatur v!

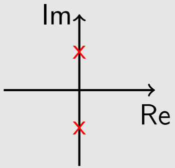
Inverterad pendel

Example (Inverterad pendel, Segway)

Systemet har en överföringsfunktion på formen

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - g/l}$$

P-reglering: $s^2 - g/l + K$



PI-reglering: Fungerar ej

Inverterad pendel

Example (Inverterad pendel, fort.)

PD-reglering:
Regulatorn ges av $F(s) = K[1 + T_D s]$ (hastighetsåterkoppling).

$$G_c(s) = \frac{G(s)F(s)}{1 + G(s)F(s)} = \frac{K[1 + T_D s]}{s^2 - g/l + K + KT_D s}$$

Systemets poler fås av

$$s^2 + KT_D s + K - g/l = 0$$

Väljer vi till exempel

$$T_D = 2/K, \; K = 1 + g/l$$

$$\Longrightarrow (s+1)^2 = 0$$

dvs. poler i -1. OK.

Inverterad pendel

D-verkan snabbar upp systemet och förbättrar stabiliteten.

Men för stort T_D ger motsatt verkan.

Gör vi en första ordningens Taylorutveckling av felet:

$$e(t + T_D) \approx e(t) + T_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)$$

så kan vi tolka $T_D \approx$ prediktionshorisont.

Lab 1

Pröva själva hur man ställer in en PID-regulator!