Institutionen för Mekanik

2016-08-22

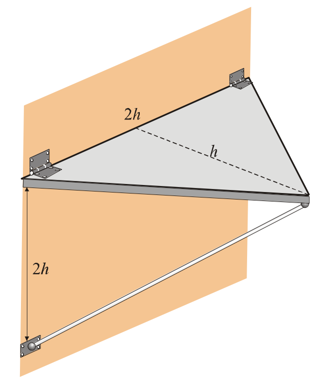
# Tentamen i SG1130, SG1109 Mekanik I

Varje uppgift 1-4 ger högst 3 poäng. Skrivtid: 4 h

**OBS! Inga hjälpmedel!** Uppgifterna 1-4 skall inlämnas på **separata** papper. ***Lycka till!***

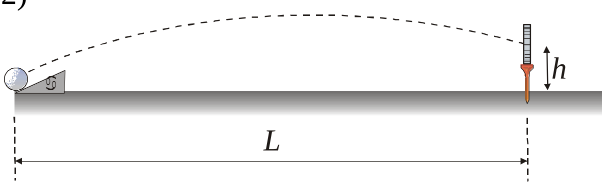
## Problem

1)



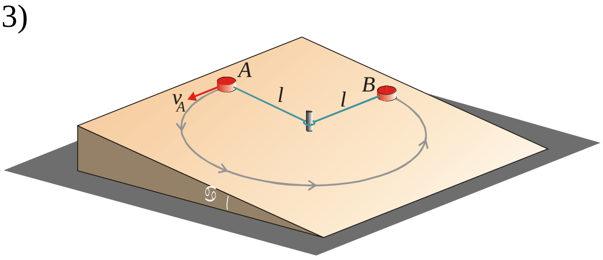

Ett bord består av en triangulär skiva med basen $2h$ och höjden $h$. Skivan med massan $m$ är tunn och kan vridas fritt kring horisontell axel genom två gångjärn längs sin bas i en vertikal vägg. För att skivan skall hållas horisontellt stöds den i spetsen av en lätt stång vars andra ände är fäst i väggen med en kulled på avståndet $2h$ under ena hörnet på skivan, se figur. Beräkna kraften i stången till storlek och riktning om stången kan anses ledad även i andra änden.

2)



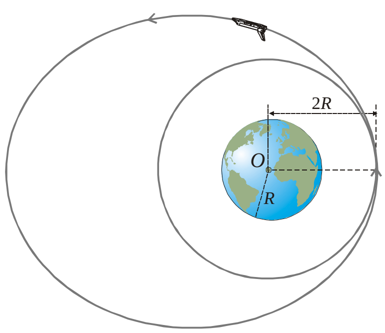

I en ”golftävling” skall man träffa en 10-krona som står på högkant på en peg, nedstucken i den horisontella greenen. Utslaget görs från en ramp som lutar vinkeln $\alpha$ mot horisontalplanet. Hur stor skall utgångshastigheten $v_0$ vara för att man skall träffa slanten? Bollen och myntet betraktas som partiklar och banans geometri framgår av figuren.

3)




En partikel med massan $m$ är fäst i en lätt stav med längden $l$ och rör sig på ett strävt lutande plan med lutningsvinkeln $\alpha$. Partikeln ges en hastighet $v_A$ i den högsta punkten $A$ vinkelrätt mot staven. Partikeln glider på planet och stannar efter trekvarts varv i punkten $B$. Bestäm friktionstalet $\mu$ mellan partikeln och planet.

4)

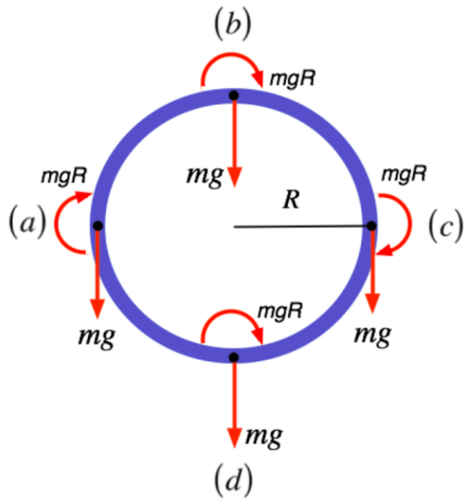



En rymdfärja rör sig i en cirkulär bana runt jorden på avståndet två jordradier från jordens medelpunkt. Plötsligt startas raketens motorer och dess fart blir 4/3 gånger så stor på mycket kort tid. Hur stort blir största avståndet till jordens medelpunkt?

## Teori

(Välj **ett** korrekt alternativ och redovisa på separat svarsblad! En poäng per uppgift)

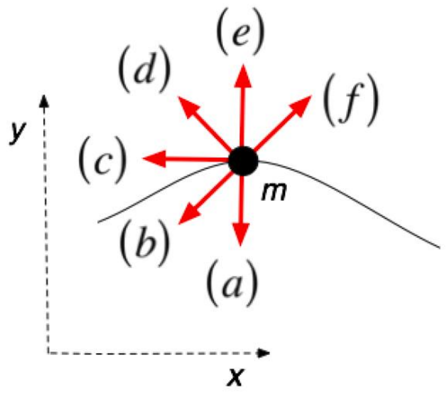
**1.** En rak dämpares kraft beskrivs av $\mathbf{F}_c = -c\dot{x}\mathbf{e}_x$, där $x$ är en lägeskoordinat, $\mathbf{e}_x$ är $x$-axelns riktning, och $c$ är en konstant. Analys av $c$-konstantens dimension ger:
**a)** $MLT^{-2}$ **b)** $MLT^{2}$ **c)** $ML^{-1}T^{-1}$ **d)** $LT^{2}$ **e)** $ML^{2}T^{-2}$ **f)** $MT^{-1}$




**2.** En tunn, homogen ring med massa $m$ och radie $R$ påverkas av tyngdkraften neråt i figuren. Ange korrekt resultant i figuren.

**3.** För ett föremål (stel kropp) i jämvikt finns jämviktsekvationer man kan använda i analys av kraftpåverkan. Hur många oberoende ekvationer är möjliga att använda?
**(a)** 6 **(b)** 5 **(c)** 4 **(d)** 3 **(e)** 2 **(f)** 1

**4. Fullfölj meningen med korrekt alternativ:**
En (en-)kraftresultant till ett godtyckligt kraftsystem …
**(a)** finns alltid.
**(b)** finns alltid, men bara i masscentrum av kroppen.
**(c)** finns alltid om kraftsumman är lika stor som momentsumman med avseende på origo.
**(d)** finns inte om kraftsumman är parallell med momentsumman med avseende på origo.
**(e)** finns inte om kraftsumman är vinkelrät mot momentsumman med avseende på origo.
**(f)** finns alltid, men bara i origo.




**5.** Vilken pil motsvarar radiella riktningen (normalriktningen) för en partikelmassa $m$ som rör sig åt vänster längs bankurvan i figuren? Banan ligger i $xy$-planet.

**6.** En logisk följd av ekvationer (från vänster led) för en partikel ges i kursens beteckningar av:

$$\dot{\mathbf{H}}_O \overset{\text{(a)}}{=} \frac{\mathrm{d}(\mathbf{r}\times\mathbf{p})}{\mathrm{d}t} \overset{\text{(b)}}{=} \mathbf{v}\times\mathbf{p}+\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}} \overset{\text{(c)}}{=} \mathbf{r}\times\dot{\mathbf{p}} \overset{\text{(d)}}{=} \mathbf{r}\times\mathbf{F} \overset{\text{(e)}}{=} \mathbf{M}_O .$$

Vid vilken likhet används definitionen av ett rörelsemängdsmoment?

**7.** För en spänd, lätt tråd som förbinder två partikelmassor gäller att
**(a)** tråden påverkar den snabbaste partikeln av de två med minst kraft.
**(b)** tråden påverkar den snabbaste partikeln av de två med störst kraft,
**(c)** tråden påverkar båda partiklarna med lika kraftvektorer,
**(d)** tråden påverkar båda partiklarna med lika stora men motriktade kraftvektorer,
**(e)** tråden påverkar båda partiklarna med lika kraftparsmoment skilt från $\bar{\mathbf{0}}$,
**(f)** tråden påverkar båda partiklarna med lika stora men motriktade kraftvektorer bara om partiklarna är i vila,

**8.** Rörelsemängden för en partikel som rör sig
**(a)** har alltid positiva komponenter.
**(b)** är alltid vinkelrät mot dess rörelseenergi.
**(c)** ändrar sig alltid vinkelrät mot kraften.
**(d)** är alltid konstant om partikeln har en likformig cirkelrörelse.
**(e)** ändrar sig alltid parallellt med kraften.
**(f)** är alltid konstant vid centralrörelse.

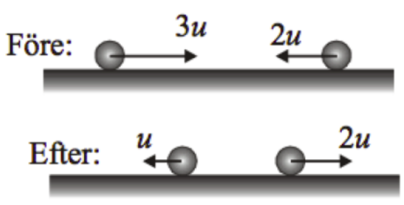
**9.** En logisk följd av ekvationer med kursens beteckningar ges av:

$$\Delta\mathbf{p} \overset{\text{(a)}}{=} \mathbf{p}(t_1)-\mathbf{p}(t_0) \overset{\text{(b)}}{=} m\mathbf{v}(t_1)-m\mathbf{v}(t_0) \overset{\text{(c)}}{=} \int_{t_0}^{t_1} m\mathbf{a}\mathrm{d}t \overset{\text{(d)}}{=} \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\mathrm{d}t$$

$$\overset{\text{(e)}}{=} \left(\int_{t_0}^{t_1} F_x\mathrm{d}t, \int_{t_0}^{t_1} F_y\mathrm{d}t, \int_{t_0}^{t_1} F_z\mathrm{d}t\right) \overset{\text{(f)}}{=} \mathbf{I}$$

Vid vilken likhet används definitionen av impulsen?

**10.** Två satelliter med lika massor rör sig kring jorden i olika banor, men där banorna har lika storaxlar. Vilka ytterligare mekaniska storheter är alltid lika för de två satelliterna?
**(a)** farter och sektorhastigheter,
**(b)** bara sektorhastigheter,
**(c)** mekaniska energier och omloppstider,
**(d)** accelerationer och sektorhastigheter,
**(e)** farter och totala mekaniska energier,
**(f)** bara omloppstider.




**11.** I en rak stöt mellan två partiklar registreras de hastigheter i $u$-enheter som visas i figuren. Vilket värde har kvoten ”vänster massa / höger massa”?
**(a)** 1/3 **(b)** 1/2 **(c)** 1 **(d)** 2 **(e)** 3 **(f)** 4

**12.** Antag att ett mekaniskt system satisfierar svängningsekvationen:
$\ddot{x}+c\dot{x}+\dfrac{4k}{M}x=a$, där $k$, $M$, $a$ och $c$ är konstanter. För vilket värde på $c$ är systemet kritiskt dämpat?

**(a)** $\dfrac{aM}{4k}$ **(b)** $4a\sqrt{\dfrac{k}{M}}$ **(c)** $4\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ **(d)** $2a\sqrt{\dfrac{M}{k}}$ **(e)** $2\sqrt{\dfrac{a}{k}}$ **(f)** $4\sqrt{\dfrac{k}{M}}$

# Svar
**(Markera svar med <u>ett</u> tydligt kryss 'X' på varje rad)**

| | (a) | (b) | (c) | (d) | (e) | (f) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | | | | | | |
| **2.** | | | | | | |
| **3.** | | | | | | |
| **4.** | | | | | | |
| **5.** | | | | | | |
| **6.** | | | | | | |
| **7.** | | | | | | |
| **8.** | | | | | | |
| **9.** | | | | | | |
| **10.** | | | | | | |
| **11.** | | | | | | |
| **12.** | | | | | | |

Person-nr:________________________________________

För- och efternamn (texta):

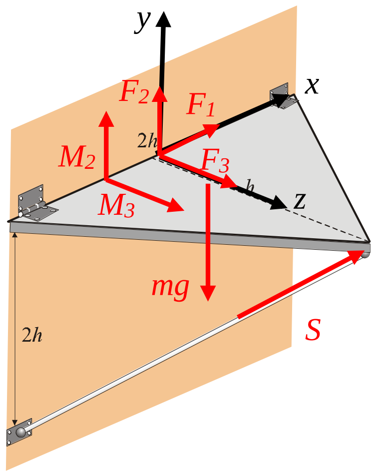
________________________________________________

________________________________________________

Lösningsförslag:

Problemdelen:

1) Frilägg först de relevanta krafter och inför ett koordinatsystem. Tyngdpunkten av triangeln ligger vid i punkten (h,0,h/3).




Stångkraften **S** är i riktning av stången, $\mathbf{S} = S\cdot(1,2,1)/\sqrt{6}$. Systemet är i jämvikt, dvs kraftsumman och momentsumman är noll. Eftersom vi bara söker **S** beräknar vi momentet kring origo: $\begin{pmatrix}0\\0\\h/3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\frac{S}{\sqrt{6}}+\begin{pmatrix}0\\M_2\\M_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Momentet i $x$ blir då $mg\frac{h}{3}=2h\frac{S}{\sqrt{6}}$ och därmed $S=\frac{\sqrt{6}}{6}mg$. Slutresultatet blir $\mathbf{S}=\frac{mg}{6}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

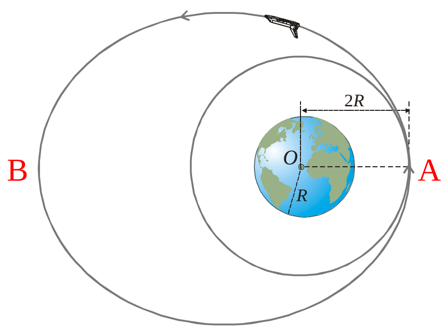
2) Enda accelerationen i problemet är $\mathbf{a}=(\ddot{x},\ddot{y},\ddot{z})=-g\mathbf{e}_y$. Med begynnelsevillkor vid $t=0: \mathbf{v}=(v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha, 0)$ och $\mathbf{r}=\mathbf{0}$, integrerar vi två gånger. Vi får $x=v_0\cos\alpha\cdot t$ och $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\alpha\cdot t$.

Bollen når $x=L$ vid tid $t_1=L/(v_0\cos\alpha)$. Samtidigt vill vi att $y=h$ vid samma tid $t_1$: $h=-\frac{1}{2}gt_1^2+v_0\sin\alpha\cdot t_1$. Om man sätter in allt och löser för $v_0^2$ får man slutresultat

$$v_0^2=\frac{gL}{2\cos^2\alpha(L\tan\alpha-h)}.$$

3) Totala arbete $U_{A-B}=T_B-T_A=0-\frac{1}{2}mv_A^2=U_{A-B}^{tyngd}+U_{A-B}^{fr}$. Arbetet av tyngdkraften är $U_{A-B}^{tyngd}=V_A^{mg}-V_B^{mg}=0+\sin\alpha\cdot l\cdot mg$. Därmed får vi arbetet av friktionen som $U_{A-B}^{fr}=-\frac{1}{2}mv_A^2-mgl\sin\alpha$. Samtidigt vet vi att friktionens arbete är given av $\mu$ gånger normalkraften och vägens längd, dvs $U_{A-B}^{fr}=-\mu mg\frac{3}{4}2\pi l$. De två sista ekvationer kombineras, och friktionstalet bestäms till $\mu=\dfrac{\frac{1}{2}v_A^2+gl\sin\alpha}{\frac{3}{2}gl\pi}$.

4) Först, bestäm hastigheten på cirkulära banan:




$$e_n : m\frac{v_C^2}{2R} = G\frac{mM}{(2R)^2} \Rightarrow v_C^2 = \frac{GM}{2R} = \frac{gR}{2}.$$

Hastigheten efter motorns inverkan i punkt A är

$$v_A = \frac{4}{3}v_C.$$

På elliptiska banan, rörelsemängdsmomentet är konstant: $2Rv_A = hv_B$, vilket ger $v_B = \frac{8}{3}\frac{R}{h}v_C$, om vi betecknar punkten längst borta från jorden med B.

Mekaniska energin är också konstant: $T_A + V_A = T_B + V_B$, och med gravitationspotential $V = -G\frac{mM}{r} = -mg\frac{R^2}{r}$ fås

$$\frac{1}{2}mv_A^2 - mg\frac{R^2}{2R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - mg\frac{R^2}{h}.$$

Man sätter nu in $v_A, v_B, v_C$ och man får en kvadratisk ekvation

$$h^2 - 18Rh + 32R^2 = 0.$$

Det finns två lösningar $h_{1/2} = \frac{18R \pm \sqrt{324 - 4 \cdot 32}R}{2} = (9 \pm 7)R$. Sökta lösningen är

$\underline{\underline{h = 16R}}$.

Lösningsförslag Teoridelen:

| | **(a)** | **(b)** | **(c)** | **(d)** | **(e)** | **(f)** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | | | | | | **X** |
| **2.** | **X** | | | | | |
| **3.** | **X** | | | | | |
| **4.** | | | | **X** | | |
| **5.** | **X** | | | | | |
| **6.** | **X** | | | | | |
| **7.** | | | | **X** | | |
| **8.** | | | | | **X** | |
| **9.** | | | | | | **X** |
| **10.** | | | | | | **X** |
| **11.** | | | **X** | | | |
| **12.** | | | | | | **X** |