Tentamen SF1634 16/8 2016
Svar & lösningsförslag

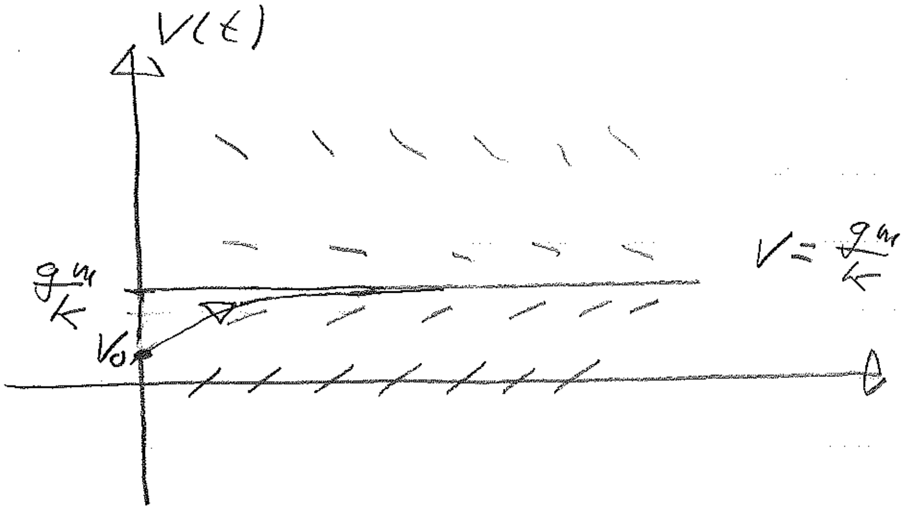
(1.)

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

Vi gör en riktningsfältsanalys.

V	$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}V$
	< 0
$\frac{gm}{k}$	$= 0$
	> 0



Eftersom $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}V$ är $\frac{dv}{dt} = 0$

OMM $V = \frac{gm}{k}$, så detta är enda stationära lösning.

Då $\frac{dv}{dt} < 0$ för $V > \frac{gm}{k}$ och $\frac{dv}{dt} > 0$ för $V < \frac{gm}{k}$ följer att den stationära lösningen $V(t) = \frac{gm}{k}$ är globalt stabil, så $\lim_{t\to\infty} V(t) = gm/k$ för varje V_0.

<u>Svar</u>: $\lim_{t\to\infty} V(t) = \frac{gm}{k}$

(2.) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad (1) \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty \quad (2) \end{cases}$

Låt $\mathcal{F}$ vara Fouriertransform m.a.p. x, och låt $U(\omega,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\}(\omega)$.

Då gäller att

- $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = i^2\omega^2 U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$
- $\mathcal{F}\left\{\dfrac{\partial u}{\partial t}\right\} = \dfrac{\partial U}{\partial t}(\omega,t)$
- $\mathcal{F}\{u(x,0)\} = U(\omega,0)$ så

$$U(\omega,0) = \mathcal{F}(e^{-|x|}) = \frac{2}{1+\omega^2} \quad \begin{pmatrix} \text{B F32} \\ \text{sid 314} \end{pmatrix}$$

$\mathcal{F}$-transformering av (1) ger för varje ω

$$-\omega^2 U = \frac{dU}{dt} \iff \frac{dU}{dt} + \omega^2 U = 0$$

$$\iff U(\omega,t) = C(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

Vi har också $U(\omega,0) = \dfrac{2}{1+\omega^2} \Rightarrow C(\omega) = \dfrac{2}{1+\omega^2}$

så $U(\omega,t) = \dfrac{2}{1+\omega^2}e^{-\omega^2 t}$.

Alltså är $u(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega,t)\} =$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+\omega^2}e^{-\omega^2 t}e^{i\omega x}\,d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega^2 t}}{1+\omega^2}e^{i\omega x}\,d\omega. \quad \text{V.S.B.}$$

③ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xy - y \\ \frac{dy}{dt} = xy - 2x + y - 2 \end{cases}$

Stationära punkter (x, y) ges av

$\begin{cases} xy - y = 0 & (1) \\ xy - 2x + y - 2 = 0 & (2) \end{cases}$

$(1) \Leftrightarrow y(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ eller $y = 0$.

$x = 1$ & $(2) \Leftrightarrow y - 2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$

$y = 0$ & $2 \Leftrightarrow -2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Alltså finns två stationära punkter $(1, 2)$ och $(-1, 0)$

Stabiliteten undersöks m h a Jacobimatrisen

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x(xy - y) & \partial/\partial y(xy - y) \\ \partial/\partial x(xy - 2x + y - 2) & \partial/\partial y(xy - 2x + y - 2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y & x - 1 \\ y - 2 & x + 1 \end{pmatrix}$$

$$J(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ som har ett

dubbelt egenvärde $\lambda = 2$, (med varje vektor $\binom{a}{b} \neq \bar{0}$ som egenvektor.)

$\Rightarrow (1,2)$ <u>instabil</u> <u>degenererad nod</u> (av "stjärn" typ)

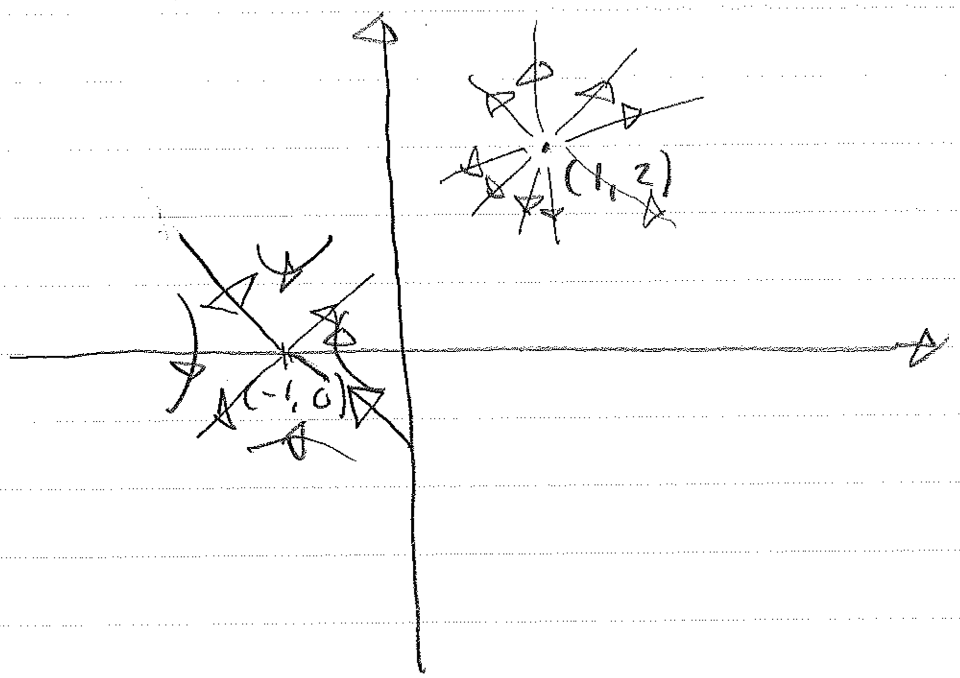
3. forts.

$$J(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Egenvärden ges av $\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm 2$

så $(-1,0)$ är en sadelpunkt och därmed instabil.



Svar: Det finns två stationära punkter
$(1,2)$ är en instabil degenererad nod
$(-1,0)$ är en sadelpunkt, och alltså instabil

(4)

$$\Theta''(t) + \Theta(t) = \delta(t-\pi), \quad \Theta(0)=0, \ \Theta'(0)=1.$$

a) Laplacetransformering ger

$$\mathcal{L}\{\Theta'' + \Theta\} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{L}\{\Theta''\} + \mathcal{L}\{\Theta\} = \mathcal{L}\{\delta(t-\pi)\}$$

(Låt $\mathcal{L}\{\Theta(t)\} = L(s)$)

$$\Leftrightarrow s^2 L(s) - s\,\Theta(0) - \Theta'(0) + L = e^{-\pi s}$$

$$\Leftrightarrow (s^2+1)L = 1 + e^{-\pi s}$$

$$\Leftrightarrow L(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s}\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow \Theta(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\pi s}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right\}$$

$$\Rightarrow \Theta(t) = \sin t + \left(\sin(t-\pi)\right)H(t-\pi)$$

(där $H(t) = \begin{cases} 1 & t>0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$)

$$\Rightarrow \Theta(t) = \sin t - (\sin t)\,(H(t-\pi))$$

(ty $\sin(t-\pi) = -\sin t \quad \forall t$)

$$\Rightarrow \Theta(t) = \begin{cases} \sin t & 0<t<\pi \\ 0 & t>\pi \end{cases}$$

SVAR:

(4.) b) $\delta(t-\pi)$ kan tolkas som att pendeln vid tid $t=\pi$ utsätts för en momentan kraftimpuls av sådan styrka att pendelns rörelse precis stannar av, och pendeln förblir i vila i läge $\Theta=0$ för $t>\pi$.

5 a) Antag att $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)$
Då är

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right]\right.$$

$$=\frac{1}{2}\left(f'(x+ct)\frac{\partial}{\partial x}(x+ct)+f'(x-ct)\frac{\partial}{\partial x}(x-ct)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(f'(x+ct)+f'(x-ct)\right)$$

P.s.s. fås

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(f''(x+ct)+f''(x-ct)\right) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(f(x+ct)+f(x-ct)\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(f'(x+ct)\frac{\partial}{\partial t}(x+ct)+f'(x-ct)\frac{\partial}{\partial t}(x-ct)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(c\left(f'(x+ct)\right)-cf'(x-ct)\right)$$

och p.s.s. fås

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1}{2}\left(c^2f'(x+ct)+(-c)^2f'(x-ct)\right)$$

$$=\frac{c^2}{2}\left(f'(x+ct)+f'(x-ct)\right) \qquad (**)$$

Från $(*)$ & $(**)$ följer att

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

5a forts

Vi ser också att

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left\{ f(x) + f(x) \right\} = f(x)$$

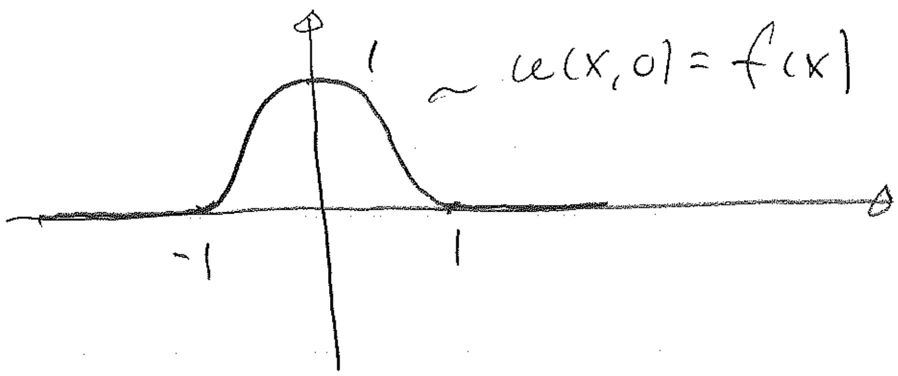
och

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{1}{2}\left(c f'(x) - c f'(x) \right)$$

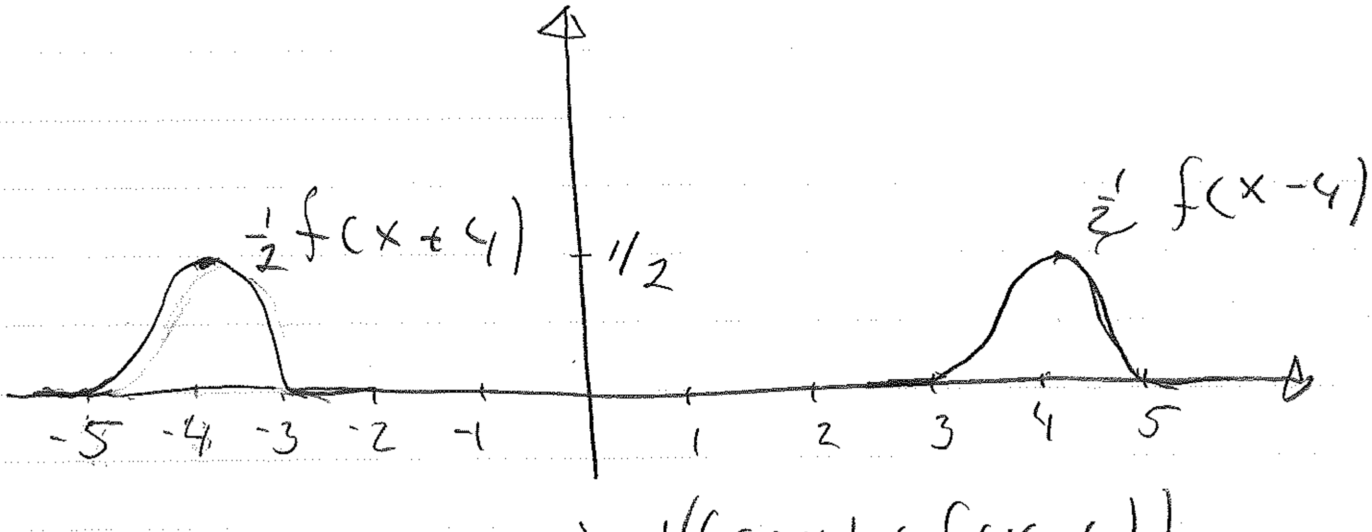
$$= 0.$$

V.S.B

5 b)



$\Downarrow$



$$u(x,4) = \frac{1}{2}\left(f(x+4) + f(x-4) \right)$$

(6.) $y'(x) + 4y(x) = \sin x, \quad y(0) = 1$

Laplacetransformering, med $Y = Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$ ger

$$sY(s) - y(0) + 4Y(s) = \frac{1}{1+s^2}$$

$$(s+4)Y = 1 + \frac{1}{1+s^2}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+4} + \frac{1}{(1+s^2)(s+4)}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \underbrace{e^{-4x}} + \frac{e^{-4x} + 4\sin x - \cos x}{17}$$

$$\left(\beta: \quad \underset{\text{sid } 327}{L21} \qquad \underset{\text{sid } 328}{L36}, \ a=4, b=1 \right)$$

<u>SVAR:</u> $= \frac{1}{17}\left(18e^{-4x} + 4\sin x - \cos x\right)$ (*)

Kontroll: $y(0) = \frac{1}{17}(18 - 1) = 1$ OK.

$$y'(x) = \frac{1}{17}\left(-4\left(18e^{-4x}\right) + 4\cos x + \sin x\right)$$

Så $y' + 4y =$

$$\frac{1}{17}\left(\cancel{-4(18e^{-4x})} + \cancel{4\cos x} + \sin x + \cancel{4 \cdot 18e^{-4x}} + 16\sin x - \cancel{4\cos x}\right)$$

$$= \sin x.$$

(*) Laplacetransformen är endast definierad för $x \geq 0$, och ger därför endast en lösning på $(0,\infty)$. Men kontrollen visar att lösningen gäller på hela $\mathbb{R}$.

(7.) Om $y_1(x) = x^3$ är $y_1' = 3x^2$ och $y_1'' = 6x$

a) så $x^2 y_1'' - x y_1' - 3y_1 = x^2 \cdot 6x - x \cdot 3x^2 - 3x^3 = 0$

V.S.V.

b) Vi bestämmer först allmän lösning till
$x^2 y'' - x y' - 3y = 0, \quad x > 0.$

Vet $y_1 = x^3$ är en lösning.

Ansätt $y_2(x) = u(x) \cdot x^3$ som lösning

med $y_2' = x^3 u' + 3x^2 u$ och $y_2'' = x^3 u'' + 6x^2 u' + 6xu$

Insatt i ekvation ger detta

$$x^2(x^3 u'' + 6x^2 u' + 6xu) - x(x^3 u' + 3x^2 u) - 3x^3 u = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^5 u'' + 6x^4 u' + \cancel{6x^3 u} - x^4 u' - \cancel{3x^3 u} - \cancel{3x^3 u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^5 u'' + 5x^4 u' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(x^5 u'\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^5 u' = C \quad \Leftrightarrow \quad u' = \frac{C}{x^5} \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{C_1}{x^4} + C_2$$

så $y_2(x) = x^3 u = \dfrac{C_1}{x} + C_2 x^3$.

Vi väljer $C_1 = 1$ och $C_2 = 0$ och

får $y_2(x) = \dfrac{1}{x}$

7 b forts

$\{x^3, \frac{1}{x}\}$ är linjärt oberoende på $x>0$, så allmän lösning

är $y(x) = Ax^3 + B\frac{1}{x}$

med $y'(x) = 3Ax^2 - B\frac{1}{x^2}$

Villkoren $y(1)=2$ och $y'(1)=2$

$\Rightarrow$ $A=B=1$

SVAR: $y(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

8. Vi löser först den homogena ekvationen

$$\overline{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \overline{X}$$ med egenvärdesmetoden.

$$0 \overset{\text{sätt}}{=} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+6)(\lambda-2) - 9 =$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda - 21 \Longrightarrow \lambda = -2 \pm \sqrt{4+21}$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = -7 \quad \text{eller} \quad \lambda = \lambda_2 = 3$$

Tal $\lambda_1 = -7$ hör egenvektoren $\overline{K_1} \neq 0$ s.a.

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \overline{K_1} = \overline{0}, \quad \text{ta } K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Till $\lambda_2 = 3$ hör egenvektoren $\overline{K_2} \neq 0$ s.a

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \overline{K_2} = \overline{0}, \quad \text{ta } K_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så allmän homogen lösning $\overline{X}_h(t) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-7t} + B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

Vi söker nu en partikulärlösning $\overline{X}_p$ till $\overline{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \overline{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

Vi prövar med en stationär lösning

$$\overline{X}_p = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b + 1 = 0 \\ 3a - 6b - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Svar: $\overline{X}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-7t} + B\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

9. Enligt förutsättningarna har f ett ändligt antal nollställen $\{c_i\}_{i=1}^{n}$

s.a $f(c_i)=0$, $i=1,\dots n$.

och $f(y)\neq 0$ för $y \notin c_i$ $i=1,\dots n$.

Vi kan anta att $c_1<c_2<c_3<\dots<c_n$.

Det är klart $\frac{dy}{dt}=f(y)$ har n st. stationära lösningar $y\equiv c_i$, $i=1\dots n$.

Dessa delar in t-y planet i $(n+1)$ st horisontella band.

Observera att eftersom $f(y)$ och $f'(y)$ är kontinuerliga, är villkoren som garanterar entydiga lösningar uppfyllda i hela t-y-planet, så lösningskurvor kan inte korsa varandra eller tangera varandra.

Betrakta nu något av de horisontella banden $B_i: c_i<y<c_{i+1}$ (eller $B_0: y<c_1$ eller $B_{n+1}: y>c_n$)

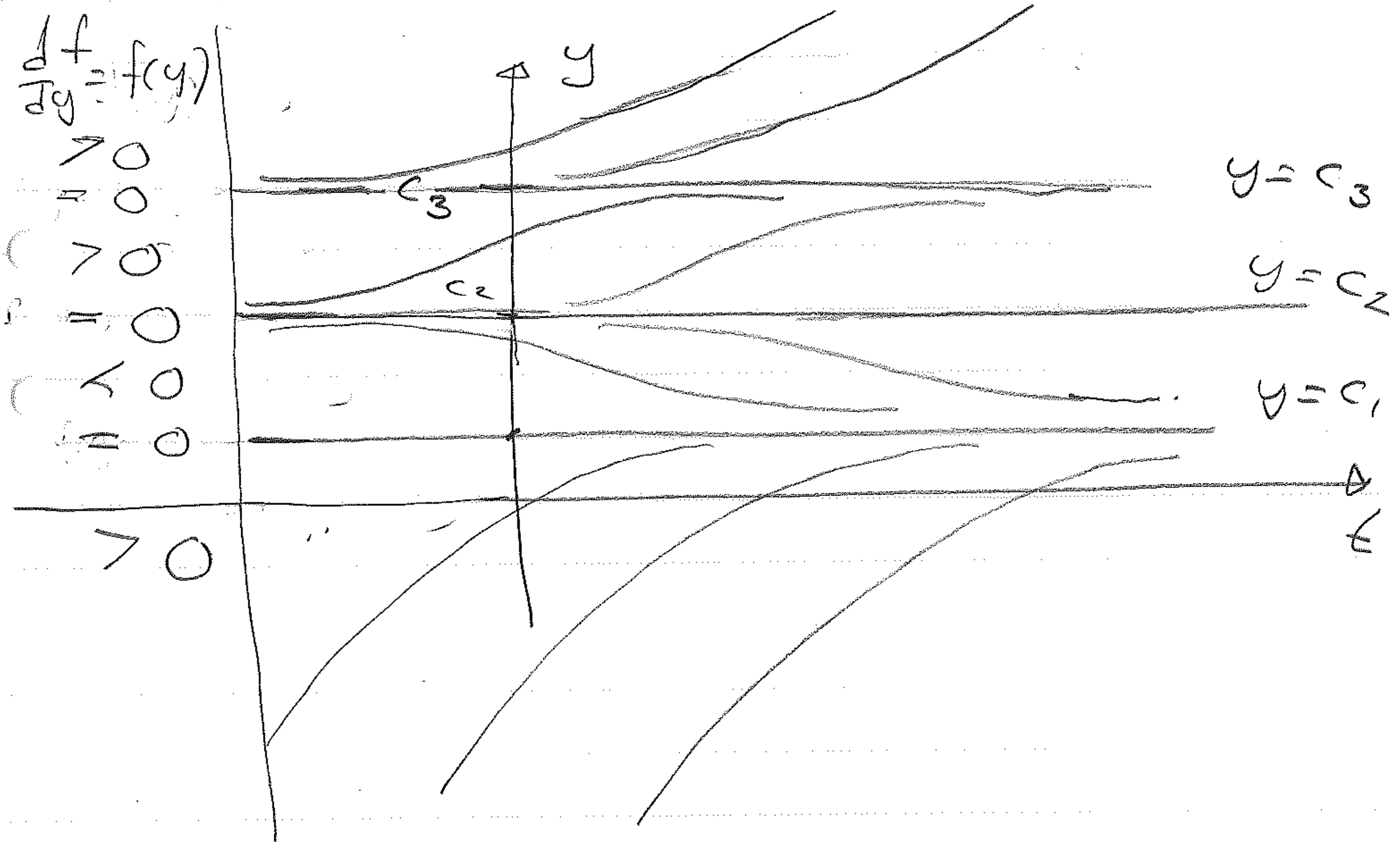
Då $f(y)\neq 0$ då $y\notin\{c_i\}_{i=1}^{n}$ har $f(y)$ konstant tecken i hela intervallet (c_i, c_{i+1}),

dvs $\frac{dy}{dt}>0$ eller $\frac{dy}{dt}<0$ i hela bandet

$c_i<y<c_{i+1}$, $-\infty<t<\infty$ $\Rightarrow$ lösningar $y(t)$ är montont växande elle monotont avtagande i B_i.

(9.) forts.

Eftersom de icke-konstanta lösningarna inte kan korsa de stationära lösningarna $y = c_i$ är saken klar.



(10.) a) Antag att $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$, $0<x<\pi$.

Multiplicer bägge led med $\sin mx$, där $m \in \{1,2,3,\ldots\}$

$$\Rightarrow \quad f(x)\sin mx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin nx \cdot \sin mx\right)$$

Integration ledvis över $(0,\pi)$ ger

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \int_0^{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n \sin nx \sin mx\right)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\int_0^{\pi}\sin nx\cdot\sin mx\,dx\right)$$

Vi beräknar $\int_0^{\pi}\sin nx \sin mx\,dx =$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n-m)x-\cos(n+m)\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n-m)x\,dx-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos(n+m)\,dx.$$

För $n=m$: $\int_0^{\pi}\underbrace{\cos(\underbrace{n-m}_{=0})x}_{=1}\,dx = \pi$

För $n\neq m$: $\int_0^{\pi}\cos(n-m)x\,dx = \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right]_0^{\pi} = 0$

För alla $n,m \geq 1$ $\int_0^{\pi}\cos(n+m)\,dx = \left[\frac{\sin(n+m)}{n+m}\right]_0^{\pi} = 0$

Alltså gäller

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx\right)}_{\substack{=0 \text{ då } n\neq m \\ =\frac{\pi}{2} \text{ då } n=m}}$$

så $\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx = b_m \cdot \frac{\pi}{2}$,

dvs $b_m = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin mx\,dx$, $m=1,2,\ldots$

V.S.B.

10 b/ Tag $f(x)\equiv 1$, då är

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx = 1 \quad \forall\ 0<x<\pi$$

med $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\cdot\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} =$

$$= \frac{2}{\pi\cdot n}\left(-1+\cos n\pi\right) = \begin{cases} -4/n\pi & n \text{ udda} \\ 0 & n \text{ jämnt} \end{cases}$$

Med $x=\frac{\pi}{2}$ fås

$$\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = 1$$

(10 b forts.) Eftersom $\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} -1, & n = 1, 5, 9, \ldots \\ +1 & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0 & n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$

får

$$\frac{4}{\pi}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$$

V.S.B.