SF1634 Differentialekvationer II
Tentamen 16 augusti 2016 kl 08.00 – 13.00

Skrivtid: 5 timmar
Tillåtna hjälpmedel är *BETA, Mathematics Handbook for Science and Engineering*
Examinator: Hans Thunberg

Tentamenskrivningen omfattar två delar.

Del I består av 5 uppgifter, som vardera kan ge högst 3p vardera. Dessa fem uppgifter kan var och en tillgodoräknas mot bonuspoäng från kontrollskrivningar och muntliga redovisningar under kursens gång.
Godkänd kontrollskrivning nr i ger automatiskt 3p på uppgift nr i ($i = 1, 2, 3$) och godkänt deltagande vid muntlig redovisning av inlämningsuppgift nr j ger 3p på uppgift $3 + j$ ($j = 1, 2$). Bonus är giltig under läsåret vid ordinarie tentamen och vid omtentamen i augustiperioden.

Del II består av fem uppgifter som totalt kan ge 22 poäng, uppgifterna 6 – 8 ger maximalt 4 poäng vardera och uppgifterna 9 och 10 maximalt 5 poäng vardera.

Totalt blir det alltså möjligt att få 37 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	22	18	15	13

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

DEL I

(1) En kropp med mass $m > 0$ faller fritt under påverkan av gravition och luftmotstånd. Kroppens hastighet $v = v(t) > 0$ vid tidpunkten t uppfyller

$$\begin{cases} m\frac{dv}{dt} = mg - kv, & t > 0, \\ v(0) = v_0 > 0, \end{cases}$$

där $g > 0$ är tyngdkraftsaccelerationen och k är en positiv konstant.
Bestäm $\lim_{t\to\infty} v(t)$.

(3 p)

(2) Använd Fouriertransform i x-led för att härleda lösningen

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\omega^2 t}}{1+\omega^2} e^{i\omega x}\, d\omega$$

till initalvärdesproblemet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}, & -\infty < x < \infty, t > 0; \\ \\ u(x,0) = e^{-|x|}, & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

(3 p)

(3) Bestäm de stationära lösningarna till systemet

$$\begin{cases} x' = xy - y \\ y' = xy - 2x + y - 2 \end{cases},$$

där $x = x(t)$ och $y = y(t)$. Klassificera också de stationära lösningarna med avseende på typ och stabilitet.

(3 p)

(4) En pendels rörelse beskrivs av differentialekvationen

$$\theta''(t) + \theta(t) = \delta(t - \pi)$$

där $\theta(t)$ är pendelns utslagsvinkel, t är tid och δ är Diracs "delta-funktion". Antag att pendelns rörelse startas vid tidpunkten $t = 0$ med utslagsvinkel $\theta(0) = 0$ och vinkelhastighet $\theta'(0) = 1$.

a) Bestäm $\theta(t)$ för $t > 0$.

(2 p)

b) Tolka högerledet $\delta(t - \pi)$ och förklara hur pendelns rörelse påverkas av denna term.

(1 p)

(5) a) Visa att om $f(t)$ är en två gånger deriverbar funktion ocn c en reell konstant, så är

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right)$$

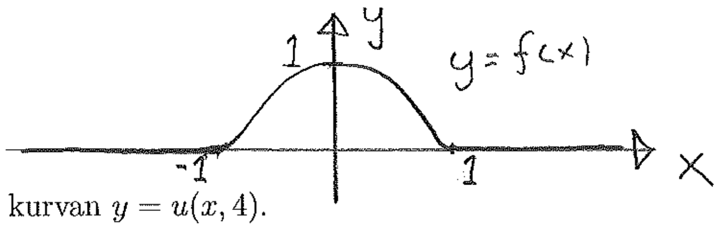
en lösning till den partiella differentialekvationen

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad -\infty < x < \infty, t > 0,$$

och intitalvillkoren $u(x,0) = f(x)$ och $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

(2 p)

b) Låt nu $c = 1$ och låt $f(x)$ se ut som i figuren nedan. Speciellt är $f(x) > 0$ då $|x| < 1$, $f(x) = 0$ då $|x| \geq 1$, och f antar ett strängt globalt maximum i $x = 0$, $f(0) = 1$.



Skissera kurvan $y = u(x, 4)$.

(1 p)

DEL II

(6) Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y'(x) + 4y(x) = \sin x, \quad y(0) = 1.$$

(4 p)

(7) a) Visa $y_1(x) = x^3$ är en lösning till differentialekvationen

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0, \quad x > 0.$$

(1 p)

b) Lös begynneslevärdesproblemet

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 2, y'(1) = 2, \quad x > 0.$$

Du kan använda dig av påståendet i a) även om du inte har löst den deluppgiften.

(3 p)

(8) Bestäm alla funktioner $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ som uppfyller

$$X' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

(4 p)

(9) Låt f vara en kontinuerlig funktion med kontinuerlig derivata på hela reella axeln. Antag också för enkelhets skull att f har högst ett ändligt antal nollställen. Visa att den ordinära differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

endast har lösningar som är antingen konstanta, monotont växande eller monotont avtagande.

(5 p)

(10) Antag att för den kontinuerliga funktionen $f(x)$ gäller att

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad 0 < x < \pi,$$

där b_n är konstanter.

a) Härled formeln

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

(3 p)

b) Visa att

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

genom att betrakta specialfallet $f(x) = 1$ för alla $0 < x < \pi$.

(2 p)