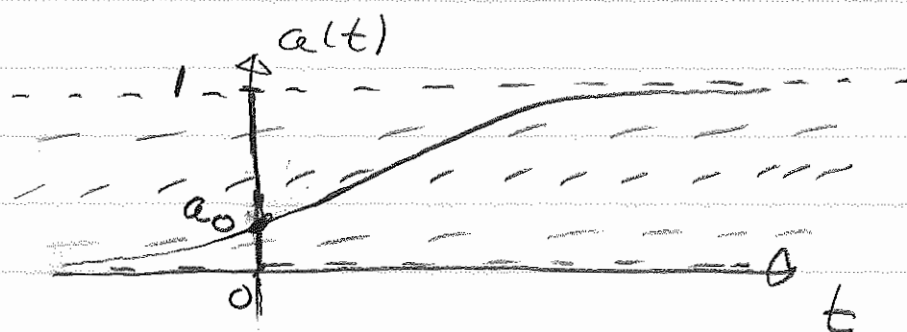


① a/

$\frac{da}{dt}$

○
+
+
+
+
○



○ Observera att

• $a(t)$ är andelen smittade, så $0 \leq a(t) \leq 1$.

○ $\frac{da}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{då } a=0 \text{ och } a=1 \\ > 0 & \text{då } 0 < a < 1 \end{cases}$

så $a \equiv 0$ och $a \equiv 1$ är stationära lösningar, och övriga lösningar är monoton växande och uppfyller $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 1$

○ b/ Vi vet att $a(t) \equiv 0$ och $a(t) \equiv 1$ är stationära lösningar, så $0 < a(0) = a_0 < 1$

○ medför att $0 < a(t) < 1$ för alla t , p ga. entydighet hos lösningar. Vi får

$$\frac{da}{dt} = k a(1-a) \iff$$

$$\int \frac{da}{a(1-a)} = \int k dt \iff$$

1 (6)
forts

$$\int \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{a} \right) da = \int k dt \quad \Leftrightarrow$$

$$-\ln |1-a| + \ln |a| = kt + C \quad \Leftrightarrow$$

($\begin{matrix} 1-a > 0 \\ a > 0 \end{matrix}$)

$$\ln \frac{a}{1-a} = kt + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{1-a} = C_1 e^{kt}, \quad C_1 = e^C > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = C_1 e^{kt} - a C_1 e^{kt}$$

$$\Leftrightarrow a (1 + C_1 e^{kt}) = C_1 e^{kt}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{C_1 e^{kt}}{1 + C_1 e^{kt}}$$

$$\Leftrightarrow a(t) = \frac{1}{1 + C_2 e^{-kt}} \quad C_2 = 1/C_1 > 0$$

$$a(0) = a_0 \quad \text{ger}$$

$$a_0 = \frac{1}{1 + C_2} \quad \text{så} \quad C_2 = \frac{1}{a_0} - 1 = \frac{1-a_0}{a_0}$$

så

$$a(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-a_0}{a_0} e^{-kt}} = \frac{a_0}{a_0 + (1-a_0) e^{-kt}}$$

SVAR: $a(t) = \frac{a_0}{a_0 + (1-a_0) e^{-kt}}$

2.

$$f(x) = x \quad -\pi < x \leq \pi$$

$$f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$f(x)$ är en udda funktion på $(-\pi, \pi)$,
 $\Rightarrow F(x)$ är en Fourier sinusserie.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \left[\begin{array}{l} U = x \quad V = -\frac{1}{n} \cos nx \\ dU = dx \quad dV = \sin nx \, dx \end{array} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} x \cos nx \right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2} \left[\sin nx \right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi + 0 + \frac{2}{n^2} (\underbrace{\sin n\pi - \sin 0}_{=0})$$

$$= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

SVAR: $F(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$

$$F(3\pi) = F(\pi) = \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

$$(3) \quad \underline{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \underline{X}$$

Egenvärden $\lambda \in \mathbb{C}$ till $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ges av

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+2) - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \lambda_1 = -3 \text{ eller } \lambda = \lambda_2 = 2$$

Vi bestämmer egenvektorer K_1 och K_2 .

K_1 är egenvektor med egenvärde $\lambda_1 = -3$ om

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} K_1 = 0, \quad \text{t.ex. } K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Detta ger oss lösning $\underline{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Egenvärdet $\lambda_2 = 2$ ger en lösning på formen

$$\underline{X}_2 = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Allmän lösning: } \underline{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} e^{2t}$$

Om $C_2 \neq 0$ gäller att $|\underline{X}(t)| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$.

$$\text{Med } \underline{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

gäller $\underline{X}(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, t \rightarrow \infty$.

$$\underline{\text{Svar:}} \quad \underline{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

4.

$$m \Theta'' + \beta \Theta' + k \sin \Theta = 0 \quad (*)$$

a) Inför $x = \Theta$ och $y = x' = \Theta'$.

$$\text{Då är } \Theta'' = \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\Theta') = y'$$

och ur ekvationen (*) fås

$$\Theta'' = -\frac{\beta}{m} \Theta' - \frac{k}{m} \sin \Theta, \quad \text{dus}$$

$$y' = -\frac{\beta}{m} y - \frac{k}{m} \sin x$$

Vi kan alltså skriva (*) som systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\beta}{m} y - \frac{k}{m} \sin x \end{cases}$$

Stationära lösningar fås då

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\frac{\beta}{m} y - \frac{k}{m} \sin x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = n\pi \\ y = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) Stationära punkters stabilitet avgörs genom Linjärisering.

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(y) & \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}\cos x & -\beta/m \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 stationära punkter
 $(x, y) = (2m\pi, 0)$ fås

$$J(2m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} \cos 2m\pi & -\beta/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\beta/m \end{pmatrix}$$

vars egenvärden λ bestäms av

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -\beta/m - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k}{m} \stackrel{\text{sätt}}{=} 0$$

$$\lambda = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

- om $\frac{\beta^2}{4m^2} \gg \frac{k}{m}$ fås två negativa

reella egenvärden

- om $\frac{\beta^2}{4m^2} < \frac{k}{m}$ fås komplexa (icke reella)
egenvärden λ med $\text{Re}(\lambda) < 0$

Båge dessa fall ger stabila stationära
lösningar i punkterna $(2m\pi, 0)$

1 punkter $((2m+1)\pi, 0)$ fås

$$J((2m+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +k/m & -\beta/m \end{pmatrix} \text{ med egenvärden}$$

som ges av $\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda - \frac{k}{m}$, dvs $\lambda = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}$

som ger reella egenvärden med olika tecken,

dvs instabila stationära lösningar.

Svar (4):

a) Ekvationen är ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = 0 \end{pmatrix}$$

som har stationära punkter

$$(x, y) = (n\pi, 0), \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) För jämna $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$,

är $(x, y) = (2m\pi, 0)$ stabil

För udda $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$,

är $(x, y) = ((2m+1)\pi, 0)$ instabil

5.

a) Låt $u(x, y) = f(x - 2y)$, där $f(t)$ är en deriverbar funktion.

Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-2y) \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-2y)}_{=1} = f'(x-2y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x-2y) \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x-2y)}_{=-2} = -2 f'(x-2y)$$

Alltså är

$$2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2 f'(x-2y) - 2 f'(x-2y) = 0$$

V.S.B.

b) Om $u(x, y) = \underline{X}(x) \underline{Y}(y)$ så är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underline{X}'(x) \underline{Y}(y) \text{ och } \frac{\partial u}{\partial y} = \underline{X}(x) \underline{Y}'(y).$$

Om $u = \underline{X}\underline{Y}$ är en lösning gäller alltså

$$2 \underline{X}' \underline{Y} + \underline{X} \underline{Y}' = 0 \Leftrightarrow \frac{\underline{X}'}{\underline{X}} = -\frac{1}{2} \frac{\underline{Y}'}{\underline{Y}} = \lambda$$

λ konstant

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{X}' = \lambda \underline{X} \\ \underline{Y}' = -2\lambda \underline{Y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{X}(x) = A e^{\lambda x} \\ \underline{Y}(y) = B e^{-2\lambda y} \end{cases}, A, B \in \mathbb{R}$$

så $u(x, y) = \underline{X}\underline{Y} = C e^{\lambda(x-2y)}$, och $u(0,0) = 1 \Rightarrow C = 1$

SVAR b) $u(x, y) = e^{\lambda(x-2y)}$, λ konstant.

$$\textcircled{6.} \quad x^2 y' + y = x^2 e^{1/x}, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow y' + \frac{1}{x^2} y = e^{1/x} \quad (\text{l\u00e4j\u00e4r, 1:a ordn. ODE})$$

Best\u00e4m integrerande faktor

$$\mu(x) = e^{\int 1/x^2 dx} = e^{-1/x}$$

Mult. av v.l. och h.l. med μ ger

$$\underbrace{e^{-1/x} y' + \frac{1}{x^2} e^{-1/x} y}_{\frac{d}{dx} (e^{-1/x} y)} = \underbrace{e^{-1/x} \cdot e^{1/x}}_{=1}$$

$$\Rightarrow e^{-1/x} y = x + C$$

$$\Rightarrow y(x) = (x + C) e^{1/x}$$

Svar: $y(x) = (x + C) e^{1/x}$

7.

$$y(t) + 3 \int_0^t y(u) \sin(t-u) du = t$$

$(y * \sin)(t)$

Se place transformering, där $Y = Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$,
ger

$$Y + 3Y \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y + 3Y \cdot \frac{1}{1+s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow Y \left(1 + \frac{3}{1+s^2} \right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\frac{s^2+4}{1+s^2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s^2(s^2+4)}$$

Invers transformering ger

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}$$

(Beta L24) (Beta L39)

$$= \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{2t - \sin 2t}{8}$$

$$= \frac{3}{8} \sin 2t + \frac{1}{4} t. \quad \underline{\underline{\text{SVAR}}}$$

8. a) Ansätt $y = x^m$, då är $y' = m x^{m-1}$ och

$$y'' = m(m-1)x^{m-2}$$

$y = x^m$ uppfyller alltså given ekvation om

$$m(m-1)x^{m-2} \cdot x^2 + 2m \underbrace{x^{m-1}}_{x^m} \cdot x = 6x^m = 0, x > 0$$

$$\Leftrightarrow [m^2 - m + 2m - 6] x^m = 0, x > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$m = -3 \quad \text{eller} \quad m = 2$$

Alltså är $y_1 = x^{-3}$ och $y_2 = x^2$ två stycken lösningar på $(0, \infty)$, och eftersom $y_1/y_2 \neq$ konstant är de också linjärt oberoende.

Allmän lösning förs alltså som

$$\text{SVAR: } y(x) = Ax^{-3} + Bx^2, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

a)

8 b) Ansätt partikulär lösning på formen $y_p = Cx^n$

$$y_p' = Cnx^{n-1}, \quad y_p'' = Cn(n-1)x^{n-2}$$

Insatt i given ekvation fås

$$Cn(n-1)x^n + 2Cnx^n - 6Cx^n = x^4$$

$$C(n^2 + n - 6)x^n = x^4, \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ C(n^2 + n - 6) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 4 \\ C = \frac{1}{14} \end{cases}$$

Så $x_p = \frac{1}{14}x^4$ är en partikulär lösning.

Motsvarande homogena ekvation löstes i a) och vi får

SVAR: Allmän lösning ger

$$b) \quad y_g = y_h + y_p = \underline{Ax^{-3} + Bx^2 + \frac{1}{14}x^4}$$

9. Vi använder Fouriertransformering \mathcal{F} i x -led.

$$\text{Låt } U(\omega, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\}(\omega).$$

$$\text{Då är } U(\omega, 0) = \mathcal{F}\{u(x, 0)\} = \mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1$$

$$\text{(ty } \mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = e^{-i\omega \cdot 0} = 1)$$

$$\text{och } \mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = (i\omega)^2 U(\omega, t) = -\omega^2 U(\omega, t).$$

$$\text{Vidare är } \mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \mathcal{F}\{u(x, t)\} \right\} = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Fouriertransformering i x -led av given ekvation

ger

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\omega^2 U = 0$$

$$\Rightarrow U(\omega, t) = A(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

$$\text{Vi får } A(\omega) = U(\omega, 0) \stackrel{\text{enligt}}{=} 1 \quad \text{ovan}$$

$$\text{Så alltså är } U(\omega, t) = e^{-k\omega^2 t}$$

Inverstransformering ger (BEITA F37 sid 314)

$$\underline{\underline{\text{Svar: } u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{-x^2/4kt}}}$$

10

Stationära punkter ^(x,y) fås genom att lösa

$$\begin{cases} x(5 - \sqrt{x^2 + y^2}) - y = 0 & (1) \\ y(5 - \sqrt{x^2 + y^2}) + x = 0 & (2) \end{cases}$$

Om $x \neq 0, y \neq 0$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{y}{x} = (5 - \sqrt{x^2 + y^2}) = -\frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow y^2 = -x^2 \quad \text{vilket saknar lösningar} \\ (x,y) \neq (0,0).$$

Vi ser också att $(x,y) = (0,0)$ uppfyller (1) och (2), så origo är enda stationära punkt.

För $(x,y) \neq (0,0)$ byter vi till polära koordinater

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

och det givna systemet övergår då i

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{r} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{r^2} \left(-y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned} \right.$$

(10)
forts.

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} (x^2(5 - \sqrt{x^2 + y^2}) - xy + y^2(5 - \sqrt{x^2 + y^2} + xy)) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2} (-xy(5 - \sqrt{x^2 + y^2}) + y^2 + xy(5 - \sqrt{x^2 + y^2}) + x^2) \end{cases}$$

~~7~~

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = r(5 - r) & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = 1 & (4) \end{cases}$$

Ekv (3) ger att radien $r(t)$

- är växande för $0 < r < 5$

speciellt är (0,0) instabil

- har stationär $r = 5$

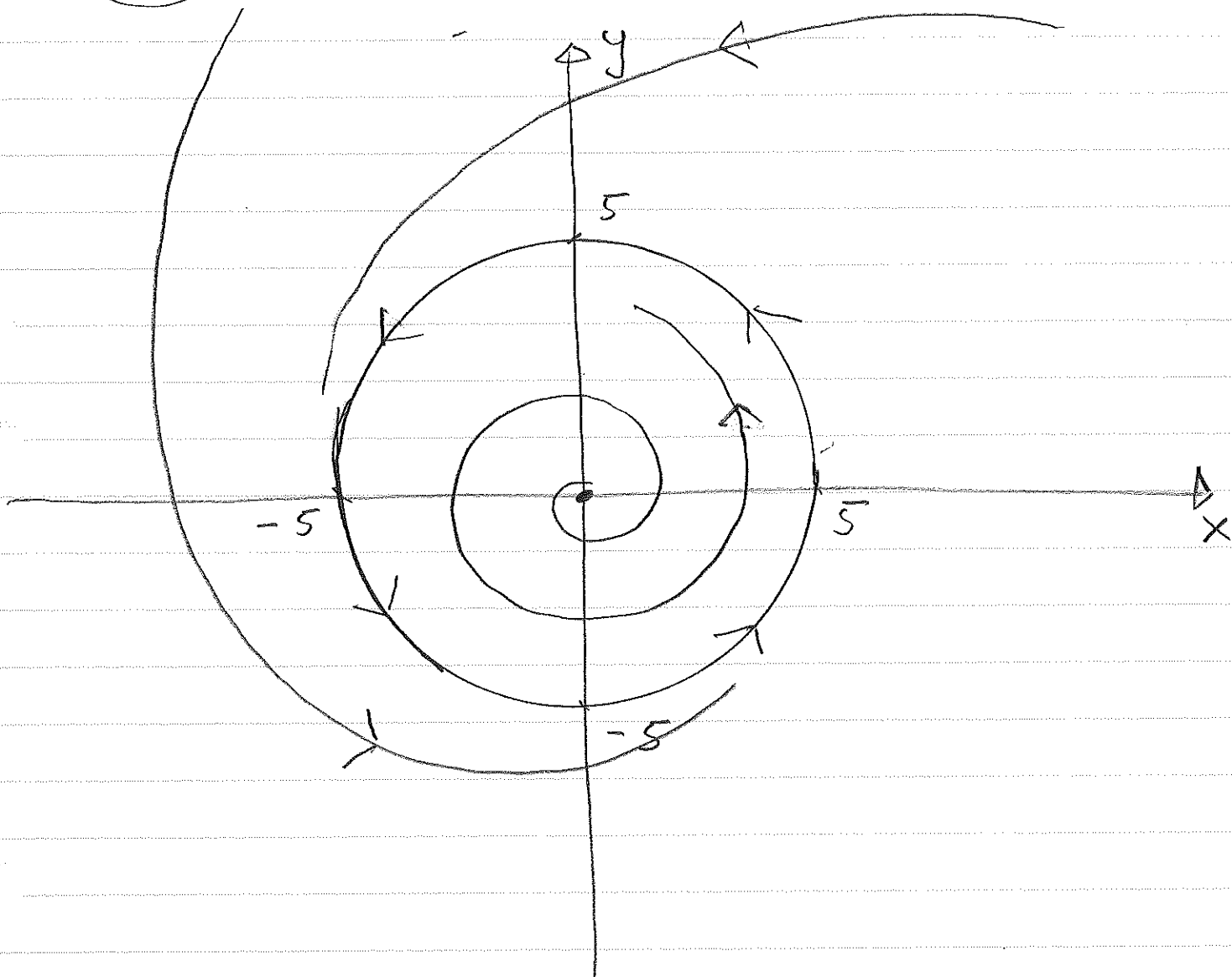
- är avtagande för $r > 5$

Ekv. (4) ger $\theta(t) = t + \theta_0$.

så alla lösningar med $r > 0$
rör sig moturs med konstant
vinkelhastighet.

10
forts.

Fasporträtt



- $(x, y) = (0, 0)$ enda stationära punkt, vilken är instabil spiral
 - På cirkeln $r = 5$ ($x^2 + y^2 = 25$) rör sig periodiska lösningar moturs.
 - Lösningar med $0 < r < 5$ rör sig i spiral ut mot cirkeln $r = 5$
 - Lösningar med $r > 5$ rör sig i spiral in mot cirkeln $r = 5$
- Alla lösningar utom $(x, y) = (0, 0)$ rör sig moturs med konstant vinkelhastighet.