SF1634 Differentialekvationer II
Tentamen 9 maj 2016 kl 14.00 – 19.00

Skrivtid: 5 timmar
Tillåtna hjälpmedel är *BETA, Mathematics Handbook for Science and Engineering*
Examinator: Hans Thunberg

Tentamenskrivningen omfattar två delar.

Del I består av 5 uppgifter, som vardera kan ge högst 3p vardera. Dessa fem uppgifter kan var och en tillgodoräknas mot bonuspoäng från kontrollskrivningar och muntliga redovisningar under kursens gång.

Godkänd kontrollskrivning nr i ger automatiskt 3p på uppgift nr i ($i = 1, 2, 3$) och godkänt deltagande vid muntlig redovisning av inlämningsuppgift nr j ger 3p på uppgift $3 + j$ ($j = 1, 2$). Bonus är giltig under läsåret vid ordinarie tentamen och vid omtentamen i augustiperioden.

Del II består av fem uppgifter som totalt kan ge 22 poäng, uppgifterna 6 – 8 ger maximalt 4 poäng vardera och uppgifterna 9 och 10 maximalt 5 poäng vardera.

Totalt blir det alltså möjligt att få 37 poäng. Betygsgränserna vid tentamen kommer att ges av

Betyg	A	B	C	D	E	Fx
Total poäng	31	26	22	18	15	13

Dessa poänggränser är preliminära och kan komma att justeras.

För full poäng på en uppgift krävs att lösningarna är väl presenterade och lätta att följa. Det innebär speciellt att införda beteckningar ska definieras, att den logiska strukturen tydligt beskrivs i ord eller symboler och att resonemangen är väl motiverade och tydligt förklarade.

Del I

(1) En djurpopulation drabbas av en smittsam sjukdom. Andelen smittade individer i populationen $a(t)$ vid tidpunkt t antas uppfylla intialvärdesproblemet

$$\frac{da}{dt} = ka(t)\,(1 - a(t))\,, \quad a(0) = a_0$$

där k är en positiv konstant och $0 < a_0 < 1$.

a) Skissera differentialekvationens riktningsfält och skissera också i samma figur funktionsgrafen till lösningskurvan.

(1 p)

b) Bestäm funktionen $a(t)$.

(2 p)

(2) Låt $f(x)$ vara den 2π-periodiska funktionen som ges av att $f(x) = x$ för $-\pi < x \leq \pi$ och att $f(x + 2\pi) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Bestäm Fourierserien $F(x)$ till $f(x)$, och ange också speciellt $F(3\pi)$.

(3 p)

(3) Bestäm alla funktioner $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ som uppfyller

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} X$$

och som dessutom uppfyller villkoret $\lim_{t\to\infty} X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(3 p)

(4) En pendels rörelse beskrivs av differentialekvationen

$$m\theta''(t) + \beta\theta'(t) + k\sin\theta(t) = 0, \qquad (*)$$

där $\theta(t)$ är pendelns utslagsvinkel mätt i radianer, $m > 0$ är pendelns massa, $\beta > 0$ är systemets friktionskoefficient och $k > 0$ är en konstant som beror på tyngdkraften och pendelns längd.

a) Skriv ekvationen (*) som ett system av första ordningens differentialekvationer, och bestäm sedan detta systems stationära punkter.

(1 p)

b) Bestäm de stationära punkternas stabilitet.

(2 p)

(5) Betrakta den partiella differentialekvationen

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (**)$$

a) Visa att om $f(t)$ är en deriverbar funktion så är $u(x, y) = f(x - 2y)$ en lösning till (**).

(1 p)

b) Bestäm alla lösningar på formen $u(x, y) = X(x)Y(y)$ till (**) som också uppfyller villkoret $u(0, 0) = 1$.

(2 p)

Del II

(6) Bestäm alla funktioner $y(x)$ sådana att

$$x^2y' + y = x^2e^{1/x}$$

för alla $x > 0$.

(4 p)

(7) Funktionen $y(t)$ uppfyller integralekvationen

$$y(t) + 3\int_0^t y(u)\sin(t - u)\,du = t.$$

Bestäm $y(t)$.

(4 p)

(8) a) Differentialekvationen $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$, $x > 0$, har lösningar på formen $y(x) = x^m$. Bestäm ekvationens allmänna lösning.

(2 p)

b) Bestäm den allmänna lösningen till ekvationen $x^2y'' + 2xy' - 6y = x^4$, $x > 0$.

(2 p)

(9) Ett giftigt utsläpp sker i ett vattendrag. Vattendraget är grunt och långsträckt och betraktas därför som endimensionellt och förses med en längdkoordinat x. Utsläppet är koncentrerat till ett mycket litet område och betraktas som punktformigt i punkten $x = 0$. Det giftiga ämnet sprider sig sedan i vattnet genom diffussion, strömmarna i vattnet antas vara försummbara. Koncentrationen $u(x,t)$ av det giftiga ämnet vid position x vid tiden t uppfyller

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, -\infty < x < \infty \\ u(x,0) = \delta(x), \end{cases}$$

där $k > 0$ är en konstant och δ betecknar Diracs 'delta-funktion'.
Bestäm $u(x,t)$.

(5 p)

(10) Analysera systemet

$$\begin{cases} x' = x\left(5 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - y \\ y' = y\left(5 - \sqrt{x^2+y^2}\right) + x \end{cases} ,$$

där $x = x(t)$ och $y = y(t)$, genom att
a) bestämma systemets stationära punkter och analysera deras stabilitet;

(3 p)

b) beskriva systemets globala fasporträtt (det vill säga, du ska i ord och bild förklara vilka typer av lösningskurvor som finns och skissera deras utseende).

(2 p)
