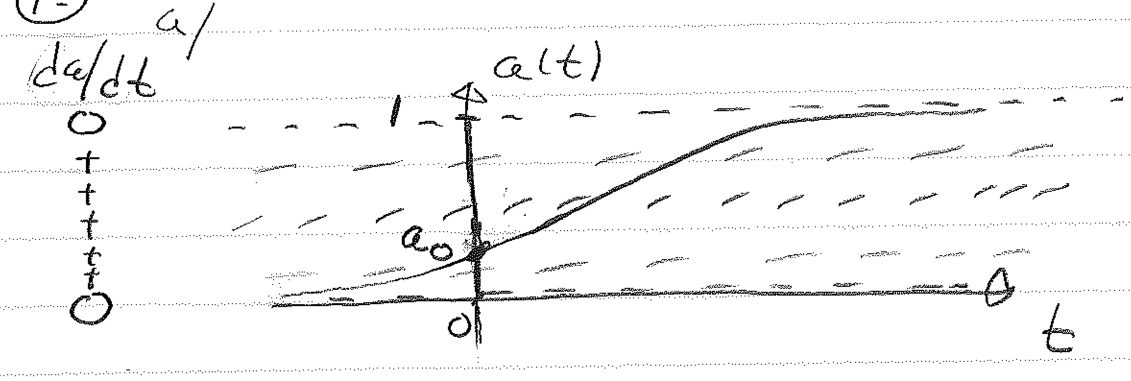
TENTAMEN SF1634 9/5 2016
SVAR & LÖSNINGSFÖRSLAG

1.



Observera att

- $a(t)$ är <u>andelen</u> smittade, så $0 \le a(t) \le 1$.
- $\frac{da}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{då } a=0 \text{ och } a=1 \\ >0 & \text{då } 0<a<1 \end{cases}$

så $a \equiv 0$ och $a \equiv 1$ är stationära lösningar, och övriga lösningar är monotont växande och uppfyller $\lim_{t\to\infty} a(t) = 1$

b/ Vi vet att $a(t) \equiv 0$ och $a(t) \equiv 1$ är stationära lösningar, så $0 < a(0) = a_0 < 1$ medför att $0 < a(t) < 1$ för alla t, p.g.a. entydighet hos lösningar. Vi får

$$\frac{da}{dt} = k a(1-a) \Longrightarrow$$

$$\int \frac{da}{a(1-a)} = \int k\, dt \Longrightarrow$$

1 ⑥ forts

$$\int \left(\frac{1}{1-a} + \frac{1}{a} \right) da = \int k \, dt \quad \Leftrightarrow$$

$$-\ln|1-a| + \ln|a| = kt + C \quad \Leftrightarrow$$

$\begin{pmatrix} 1-a > 0 \\ a > 0 \end{pmatrix}$
$$\ln \frac{a}{1-a} = kt + C \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a}{1-a} = C_1 e^{kt} \quad , \quad C_1 = e^{C} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad a = C_1 e^{kt} - a C_1 e^{kt}$$

$$\Leftrightarrow \quad a\left(1 + C_1 e^{kt}\right) = C_1 e^{kt}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{C_1 e^{kt}}{1 + C_1 e^{kt}}$$

$$\Leftrightarrow \quad a(t) = \frac{1}{1 + C_2 e^{-kt}} \qquad C_2 = 1/C_1 > 0$$

$a(0) = a_0$ ger

$$a_0 = \frac{1}{1 + C_2} \quad \text{så} \quad C_2 = \frac{1}{a_0} - 1 = \frac{1-a_0}{a_0}$$

så $$a(t) = \frac{1}{1 + \frac{1-a_0}{a_0} e^{-kt}} = \frac{a_0}{a_0 + (1-a_0) e^{-kt}}$$

<u>SVAR:</u> $$a(t) = \frac{a_0}{a_0 + (1-a_0) e^{-kt}}$$

(2.) $f(x) = x \qquad -\pi < x \leq \pi$

$f(x+2\pi) = f(x), \quad \forall\ x \in \mathbb{R}.$

$f(x)$ är en udda funktion på $(-\pi, \pi)$,

$\Rightarrow$ $F(x)$ är en Fourier sinus serie.

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \begin{bmatrix} U = x & V = -\frac{1}{n}\cos nx \\ dU = dx & dV = \sin nx \, dx \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n} x \cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n} x \cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{2}{n^2}\left[\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\pi \cos n\pi + 0 + \frac{2}{n^2}(\underbrace{\sin n\pi - \sin 0}_{=0})$$

$$= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

Svar: $$F(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx$$

$$F(3\pi) = F(\pi) = \frac{f(\pi+) + f(\pi-)}{2} = \frac{\pi - \pi}{2} = 0$$

(3.) $\bar{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \bar{X}$

Egenvärden λ till $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ges av

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda-1)(\lambda+2) - 4 = 0$$

$$\iff \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \iff (\lambda+3)(\lambda-2) = 0$$

$$\iff \lambda = \lambda_1 = -3 \text{ eller } \lambda = \lambda_2 = 2$$

Vi bestämmer egenvektorer K_1 och K_2.

K_1 är egenvektor med egenvärde $\lambda_1 = -3$ omm

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} K_1 = 0, \quad \text{ta t.ex } K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

detta ger oss lösning $\bar{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$

Egenvärdet $\lambda_2 = 2$ ger en lösning på formen

$$\bar{X}_2 = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Allmän lösning: $\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} e^{2t}$

Om $C_2 \neq 0$ gäller att $|X(t)| \to \infty,\ t \to \infty$.

Med $\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t},\ C_1 \in \mathbb{R}$
gäller $\bar{X}(t) \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \to \infty$.

Svar: $\bar{X}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t}$

4. $m\Theta'' + \beta\Theta' + k\sin\Theta = 0 \quad (*)$

a) Inför $x = \Theta$ och $y = x' = \Theta'$.

Då är $\Theta'' = \frac{d^2\Theta}{dt^2} = \frac{d}{dt}(\Theta') = y'$

och ur ekvationen (*) fås

$$\Theta'' = -\frac{\beta}{m}\Theta' - \frac{k}{m}\sin\Theta, \quad \text{dvs}$$

$$y' = -\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x$$

Vi kan alltså skriva (*) som systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x \end{cases}$$

Stationära lösningar fås då

$$\begin{cases} y = 0 \\ -\beta/m\, y - \frac{k}{m}\sin x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = n\pi \\ y = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) Stationära punktens stabilitet avgörs genom linjärisering.

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x\,(y) & \frac{\partial}{\partial y}(y) \\ \partial/\partial x\left(-\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\beta}{m}y - \frac{k}{m}\sin x\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}\cos x & -\beta/m \end{pmatrix}$$

I stationära punkter $(x,y) = (2m\pi, 0)$ fås

$$J(2m\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m}\cos 2m\pi & -\beta/m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\beta/m \end{pmatrix}$$

vars egenvärden λ bestäms av

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -k/m & -\beta/m - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \beta/m\,\lambda + k/m \overset{\text{sätt}}{=} 0$$

$$\lambda = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - k/m}$$

- om $\frac{\beta^2}{4m^2} \geq k/m$ fås två negativa reella egenvärden
- om $\beta^2/4m^2 < k/m$ fås komplexa (icke reella) egenvärden λ med $Re(\lambda) < 0$

Bägge dessa fall ger stabila stationära lösningar i punkterna $(2m\pi, 0)$

I punkter $((2m+1)\pi, 0)$ fås

$$J((2m+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +k/m & -\beta/m \end{pmatrix}$$ med egenvärden

som ges av $\lambda^2 + \beta/m\,\lambda - k/m$, dvs $\lambda = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} + \frac{k}{m}}$

som ger reella egenvärden med olika tecken, dvs instabila stationära lösningar.

Svar (4.):

a) Ekvationen är ekvivalent med systemet

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\beta}{m} y - \frac{k}{m} \sin x \end{cases}, \quad \left(\begin{cases} x = \theta \\ y = \theta' \end{cases} \right)$$

som har stationära punkter

$$(x, y) = (n\pi, 0), \quad n \in \mathbb{Z}$$

b) För jämna $n = 2m$, $m \in \mathbb{Z}$,

är $(x,y) = (2m\pi, 0)$ stabil

För udda $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{Z}$,

är $(x, y) = ((2m+1)\pi, 0)$ instabil

(5)

a) Låt $u(x,y) = f(x-2y)$, där $f(t)$ är en deriverbar funktion.

Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x-2y)\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(x-2y)}_{=1} = f'(x-2y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x-2y)\underbrace{\frac{\partial}{\partial y}(x-2y)}_{=-2} = -2f'(x-2y)$$

Alltså är

$$2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2f'(x-2y) - 2f'(x-2y) = 0$$

V.S.B.

b) Om $u(x,y) = X(x)Y(y)$ så är

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'(x)Y(y) \text{ och } \frac{\partial u}{\partial y} = X(x)Y'(y).$$

Om $u = XY$ är en lösning gäller alltså

$$2X'Y + XY' = 0 \Leftrightarrow \frac{X'}{X} = -\frac{1}{2}\frac{Y'}{Y} = \lambda$$

konstant

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X' = \lambda X \\ Y' = -2\lambda Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X(x) = Ae^{\lambda x} \\ Y(y) = Be^{-2\lambda y} \end{cases}, \ A, B \in \mathbb{R}$$

så $u(x,y) = XY = Ce^{\lambda(x-2y)}$, och $u(0,0) = 1 \Rightarrow C = 1$

<u>SVAR</u> b) $u(x,y) = e^{\lambda(x-2y)}$, λ konstant.

⑥ $x^2 y' + y = x^2 e^{1/x}$, $x > 0$

$\Leftrightarrow$ $y' + \frac{1}{x^2} y = e^{1/x}$ (linjär, 1:a ordn. ODE)

Bestäm integrerande faktor

$$\mu(x) = e^{\int 1/x^2 \, dx} = e^{-1/x}.$$

Mult. av V.L. och H.L. med μ ger

$$\underbrace{e^{-1/x} y' + 1/x^2 e^{-1/x} y}_{\frac{d}{dx}\left(e^{-1/x} y\right)} = \underbrace{e^{-1/x} \cdot e^{1/x}}_{=1}$$

$\Rightarrow$ $e^{-1/x} y = x + C_1$

$\Rightarrow$ $y(x) = (x + C_1) e^{1/x}$

<u>Svar</u>: $y(x) = (x + C_1) e^{1/x}$

⑦. $$y(t) + 3\underbrace{\int_0^t y(u)\sin(t-u)\,du}_{(y * \sin)(t)} = t$$

Laplacetransformering, där $Y = Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}(s)$, ger

$$Y + 3Y \cdot \mathcal{L}\{\sin(t)\}(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y + 3Y \cdot \frac{1}{1+s^2} = \frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y\underbrace{\left(1 + \frac{3}{1+s^2}\right)}_{\frac{s^2+4}{1+s^2}} = \frac{1}{s^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad Y(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s^2+4)} = \frac{1}{s^2+4} + \frac{1}{s^2(s^2+4)}$$

Inverstransformering ger

$$y(t) = \underset{\text{(Beta L24)}}{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}(t)} + \underset{\text{(Beta L39)}}{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right\}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2t - \sin 2t}{8}$$

$$= \underline{\underline{\frac{3}{8}\sin 2t + \frac{1}{4}t}} \; . \quad \underline{\underline{\text{: SVAR}}}$$

(8.) a) Ansätt $y = x^m$, då är $y' = mx^{m-1}$ och

$y'' = m(m-1)x^{m-2}$.

$y = x^m$ uppfyller alltså given ekvation om

$$m(m-1)\underbrace{x^{m-2}\cdot x^2}_{x^m} + 2m\underbrace{x^{m-1}\cdot x}_{x^m} - 6x^m = 0, \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \left[m^2 - m + 2m - 6\right]x^m = 0, \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$m = -3$ eller $m = 2$

Alltså är $y_1 = x^{-3}$ och $y_2 = x^2$ två stycken lösningar på $(0, \infty)$, och eftersom $y_1/y_2 \neq$ konstant är de också linjärt oberoende.

Allmän lösning fås alltså som

SVAR: a) $y(x) = Ax^{-3} + Bx^2$, $A, B \in \mathbb{R}$.

8 b) Ansätt partikulär lösning på formen $y_p = C x^n$

, $y_p' = C n x^{n-1}$, $y_p'' = C n(n-1) x^{n-2}$.

Insatt i given ekvation fås

$$C n(n-1) x^n + 2Cn x^n - 6 C x^n = x^4$$

$$\Leftrightarrow \quad C\left(n^2 + n - 6\right) x^n = x^4 \quad , \quad x > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ C(n^2+n-6) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ C = \frac{1}{14} \end{cases}$$

så $x_p = \frac{1}{14} x^4$ är en partikulär lösning.

Motsvarande homogena ekvation löstes i a) och vi får

SVAR: Allmän lösning ger

b) $y_g = y_h + y_p = \underline{A x^{-3} + B x^2 + \frac{1}{14} x^4}$

(9.) Vi använder Fouriertransformering $\mathcal{F}$ i x-led.

Låt $U(\omega, t) = \mathcal{F}(u(x,t))(\omega)$.

Då är $U(\omega, 0) = \mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{\delta(x)\} = 1$

$$\left(\text{ty } \mathcal{F}\{\delta(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\omega x}\, dx = e^{-i\omega \cdot 0} = 1 \right)$$

och $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = (i\omega)^2 U(\omega,t) = -\omega^2 U(\omega,t)$.

Vidare är $\mathcal{F}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\mathcal{F}\{u(x,t)\}\right\} = \frac{\partial U}{\partial t}$.

Fouriertransformering i x-led av given ekvation ger

$$\frac{\partial U}{\partial t} + k\omega^2 U = 0$$

$$\Rightarrow \quad U(\omega, t) = A(\omega)\, e^{-k\omega^2 t}$$

Vi får $A(\omega) = U(\omega, 0) \underset{\text{ovan}}{\overset{\text{enligt}}{=}} 1$

Så alltså är $U(\omega, t) = e^{-k\omega^2 t}$

Inverstransformering ger (BETA F 37 sid 314)

<u>SVAR:</u> $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k t}}\, e^{-x^2/4kt}$

(10) Stationära punkter (x,y) fås genom att lösa

$$\begin{cases} x\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right)-y=0 & (1) \\ y\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right)+x=0 & (2) \end{cases}$$

Om $x\neq 0, y\neq 0$ $\overset{(1)}{\underset{(2)}{\Rightarrow}}$ $\frac{y}{x}=\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right)=-\frac{x}{y}$

$\Rightarrow$ $y^2=-x^2$ vilket saknar lösningar $(x,y)\neq(0,0)$.

Vi ser också att $(x,y)=(0,0)$ uppfyller (1) och (2), så origo är enda stationära punkt.

För $(x,y)\neq(0,0)$ byter vi till polära koordinater

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$$

och det givna systemet övergår då i

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt}=\frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt}+x\frac{dy}{dt}\right) \end{cases}$$

$\binom{10}{\text{forts.}}$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{1}{r}\left(x^2\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right) - xy + y^2\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right) + xy\right) \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{r^2}\left(-xy\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right) + y^2 + xy\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right) + x^2\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r(5-r) & (3) \\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = 1 & (4) \end{cases}$$

Ekv (3) ger att radien $r(t)$

- är växande för $0 < r < 5$
  speciellt är $\underline{(0,0)}$ $\underline{\text{instabil}}$
- har stationär $r = 5$
- är avtagande för $r > 5$

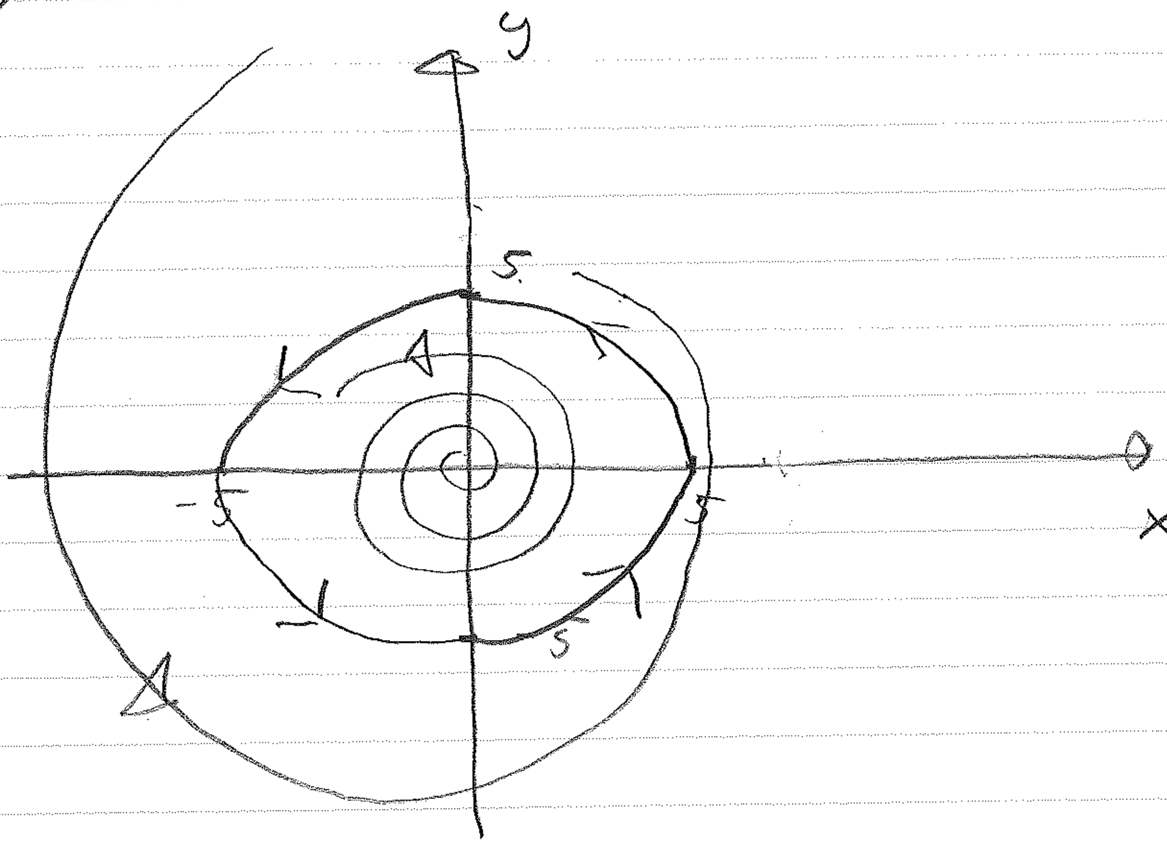
Ekv. (4) ger $\theta(t) = t + \theta_0$.

Detta ger fasporträtt

__Svar:__ $(0,0)$ enda stationära punkt, som är instabil.

10. forts.

Fasporträtt



Cirkeln $x^2+y^2=\sqrt{5}$ är
en sluten periodisk lösningskurva.

Lösningar med $r<5$ rör sig i
spiral ut mot cirkeln $x^2+y^2=\sqrt{5}$

Lösningar med $r>5$ rör sig i
spiral in mot $x^2+y^2=\sqrt{5}$