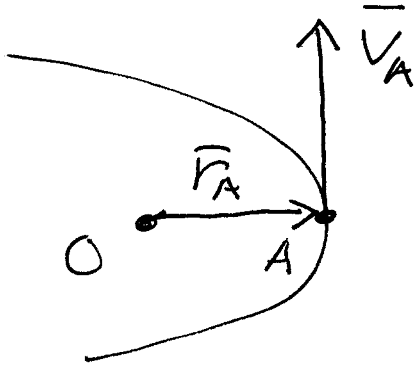
1. Uttrycket för den totala energin för satellitbanor.

Banan: $r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$

där $ed = \frac{h^2}{GM}$; $h = |\bar{r} \times \bar{v}|$

G är Newtons gravitationskonstant, M är centralkroppens massa.

Välj symmetripunkten A:



$$\bar{V}_A = r_A \dot{\theta} \bar{e}_\theta$$

$$V_A = r_A \dot{\theta} = \frac{h}{r_A}$$

$$r_A = \frac{h^2}{GM(1+e)}$$

$$E = T + V = \frac{1}{2} m V_A^2 - G\frac{mM}{r_A} =$$

$$m\left(\frac{1}{2}\frac{h^2}{r_A^2} - \frac{GM}{r_A}\right) = \frac{m}{r_A}\left(\frac{1}{2}\frac{h^2}{r_A} - GM\right) =$$

$$\frac{mGM(1+e)}{h^2}\left(\frac{1}{2}GM(1+e) - GM\right) =$$

2.

$$= \frac{1}{2}\frac{m(GM)^2}{h^2}(1+e)(e-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m(GM)^2}{h^2}(e^2-1)$$

Alltså har vi

$$E = \frac{1}{2}\frac{m(GM)^2}{h^2}(e^2-1)$$

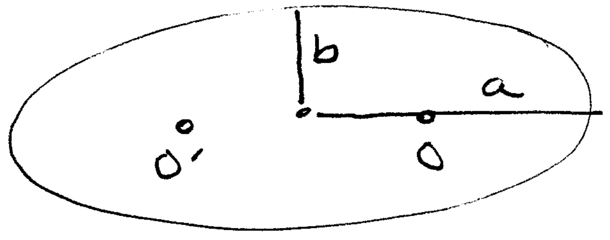
$e < 1 \Rightarrow E < 0$ Sluten bana

$e = 1 \Rightarrow E = 0$ Parabel, öppen bana

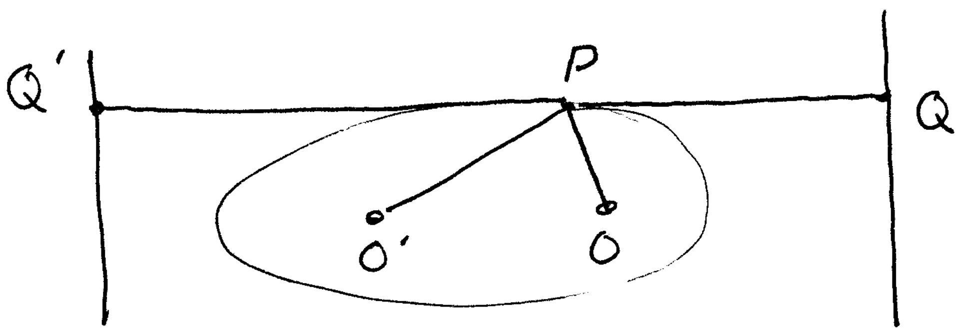
$e > 1 \Rightarrow E > 0$ Hyperbel, öppen bana

3.

Ellipsens geometri.



O' och O är brännpunkterna, a är halva storaxelns längd och b är halva lillaxelns längd.



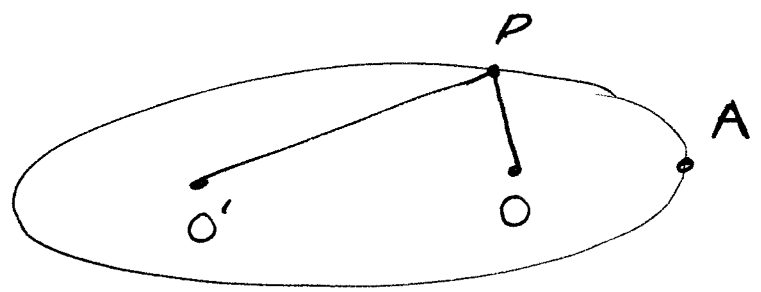
Summan $OP + O'P$ är densamma för alla punkter på ellipsen. Bevis,
Enligt kägelsnittets definition har vi

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{O'P}{PQ'} = e$$ där e är en konstant som är oberoende av vilken punkt P vi väljer.
e är excentriciteten. Alltså har vi att

$$OP + O'P = e(PQ + PQ') = e\,QQ'$$

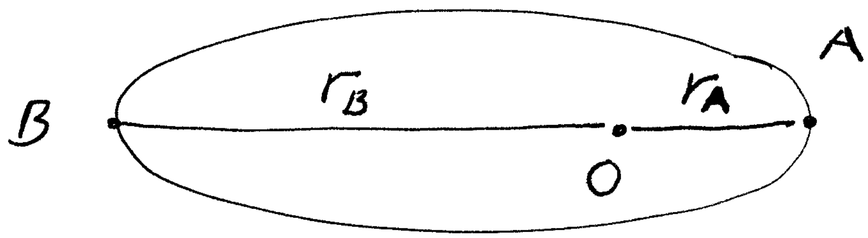
oberoende av P! QED.

4.



Eftersom $OP + O'P$ är oberoende av vilken punkt P på ellipsen vi väljer så gäller att

$O'P + OP = 2a$ (Välj punkten A istället, så syns detta tydligt.)



$$r_A = \frac{ed}{1 + e\cos 0} = \frac{ed}{1+e}$$

$$r_B = \frac{ed}{1 + e\cos\pi} = \frac{ed}{1-e}$$

$r_A + r_B = 2a$ Alltså fås

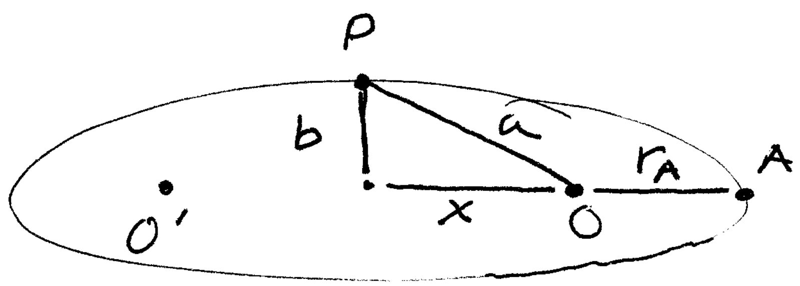
$$\frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} = 2a \Rightarrow$$

$$2ed = 2a(1-e^2) \Rightarrow ed = a(1-e^2)$$

5. Vi kan alltså skriva ellipsens ekvation som

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Sambandet mellan a, b och e:



P är symmetripunkten. OP = a eftersom

O'P + OP = 2a och O'P = OP.

$$x = a - r_A = a - \frac{a(1-e^2)}{1+e} = a - a(1-e) =$$

$$= ae$$

Pythagoras sats ger:

$$b^2 + x^2 = a^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - x^2 = a^2(1-e^2)$$

$$\Rightarrow b = a\sqrt{1-e^2}$$

6. Keplers tredje lag

Arean av en ellips kan skrivas:

$$A = \pi a b = \pi a^2 \sqrt{1-e^2} \qquad (1)$$

Låt T vara planets period, eller omloppsbanans period. Arean kan också skrivas som

$$A = \int_0^T \dot{A}\, dT$$

där $\dot{A}$ är sektorshastigheten. Sektorshastigheten är konstant $\dot{A} = \frac{1}{2} h$. Alltså fås

$$A = \frac{1}{2} h T. \qquad (2)$$

Vi har också att

$$h^2/GM = a(1-e^2) \Rightarrow$$

$$h = \sqrt{GMa(1-e^2)} \qquad (3)$$

(1), (2) och (3) ger nu

$$\pi a^2 \sqrt{1-e^2} = \frac{1}{2}\sqrt{GMa(1-e^2)}\, T \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

Detta är ett uttryck för Keplers tredje lag som säger att:

Kvadraten av planetens omloppstid är proportionell mot kuben av storaxelns längd.

Exempel

Omloppstiden för Saturnus är $T_s = 29,46$ år. Bestäm halva storaxelns längd a_s för Saturnus omloppsbana om motsvarande storhet för jordbanan är känd. Jämför $\frac{a_s}{a_j}$ med förhållandet mellan medelavstånden som är 9,54!

8. Enligt Keplers tredje lag har vi att

$$T = C a^{3/2} \quad \text{där}$$

$$C = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}}$$ är en konstant (som

är densamma för alla planeter)

$$\left.\begin{aligned} T_s &= C a_s^{3/2} \\ T_j &= C a_j^{3/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{a_s}{a_j} = \left(\frac{T_s}{T_j}\right)^{2/3}$$

$$a_s = a_j \left(\frac{T_s}{T_j}\right)^{2/3} = 29{,}46^{2/3} a_j \approx$$
$$9{,}54 a_j$$

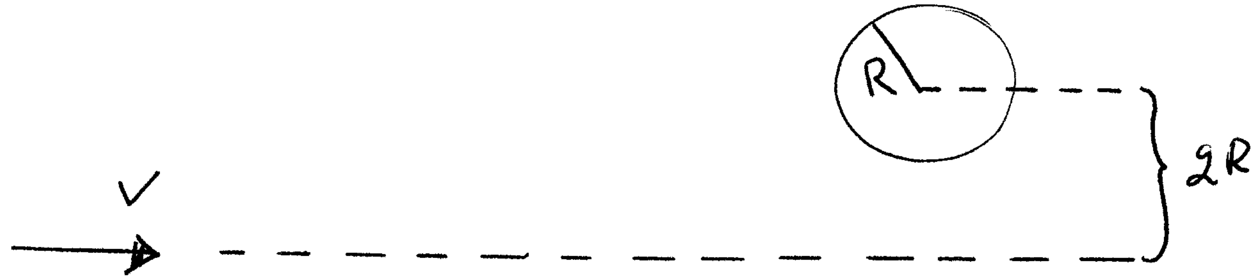
$$\frac{a_s}{a_j} = (29{,}46)^{2/3} \approx 9{,}54$$

Vi får alltså samma värde som förhållandet mellan medelavstånden (med tre siffrors noggrannhet). Det beror på att excentriciterna är små.

$$e_s = 0{,}056$$

$$e_j = 0{,}017$$

9. Exempel

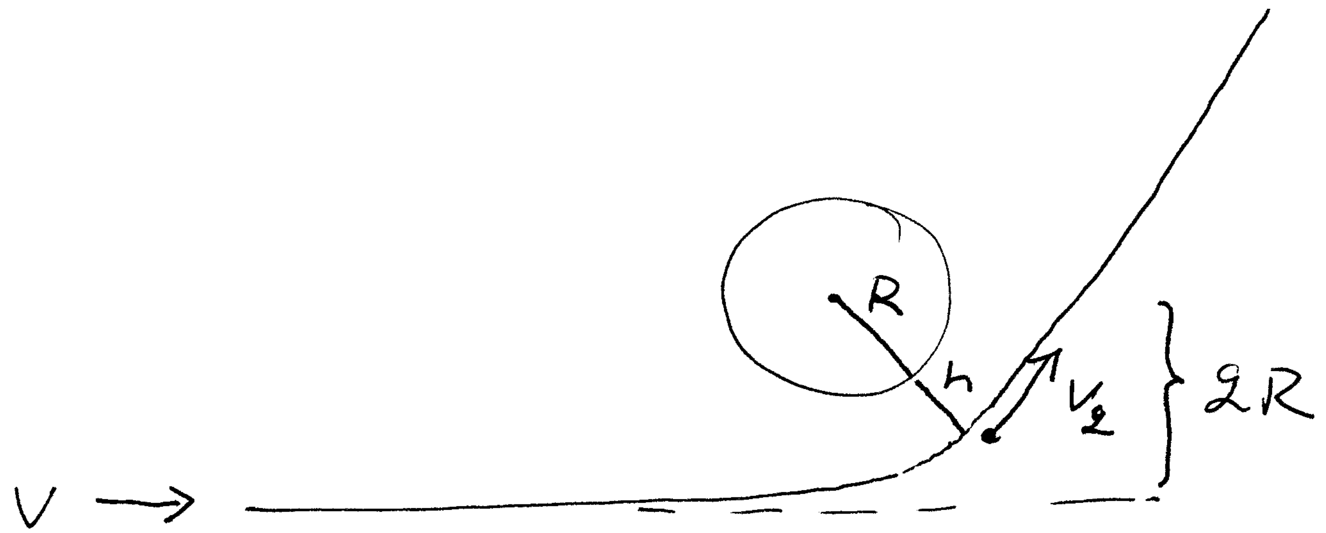


En komet närmar sig från stort avstånd jorden med en hastighet v i förhållande till jorden. Det vinkelräta avståndet mellan den förlängda linjen utefter kometens hastighetsriktning och jordens centrum är $2R$, där R är jordens radie.

a) Antag att kometens hastighet är tillräckligt stor för att den ska passera jorden och bestäm dess minsta höjd h över markytan vid passagen!

b) Bestäm hur stor v minst måste vara för att kometen ska passera jorden!

10. Banan är en hyperbel



Sätt $R + h = R_2$

Rörelsemängdsmomentet bevaras:

$$v \cancel{m}\, 2R = v_2 \cancel{m}\, R_2 \qquad (1)$$

Energin bevaras

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 - gm \frac{R^2}{R_2} \qquad (2)$$

(Potentiella energin $\rightarrow 0$ då avståndet $\rightarrow \infty$)

(1) $\Rightarrow$ $v_2 = \frac{2R}{R_2} v$ insatt i (2) ger

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \frac{4R^2}{R_2^2} v^2 - g \frac{R^2}{R_2} \Rightarrow$$

11. $$R_2^2 + \frac{2gR^2}{V^2} - 4R^2 = 0$$

$$R_2 = -\frac{gR^2}{V^2} \overset{+}{(-)} \sqrt{\left(\frac{gR^2}{V^2}\right)^2 + 4R^2}$$

$$h = R_2 - R = R\left(\sqrt{\left(\frac{gR}{V^2}\right)^2 + 4} - \frac{gR}{V^2} - 1\right)$$

b) Kometen passerar om $h \geqslant 0 \Rightarrow$

$$\sqrt{\left(\frac{gR}{V^2}\right)^2 + 4} - \frac{gR}{V^2} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{gR}{V^2}\right)^2 + 4 \geqslant \left(\frac{gR}{V^2} + 1\right)^2 \Rightarrow$$

$$4 \geqslant \frac{2gR}{V^2} + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2gR}{V^2} \leqslant 3 \Rightarrow$$

$$V \geqslant \sqrt{\frac{2}{3} g R}$$